This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

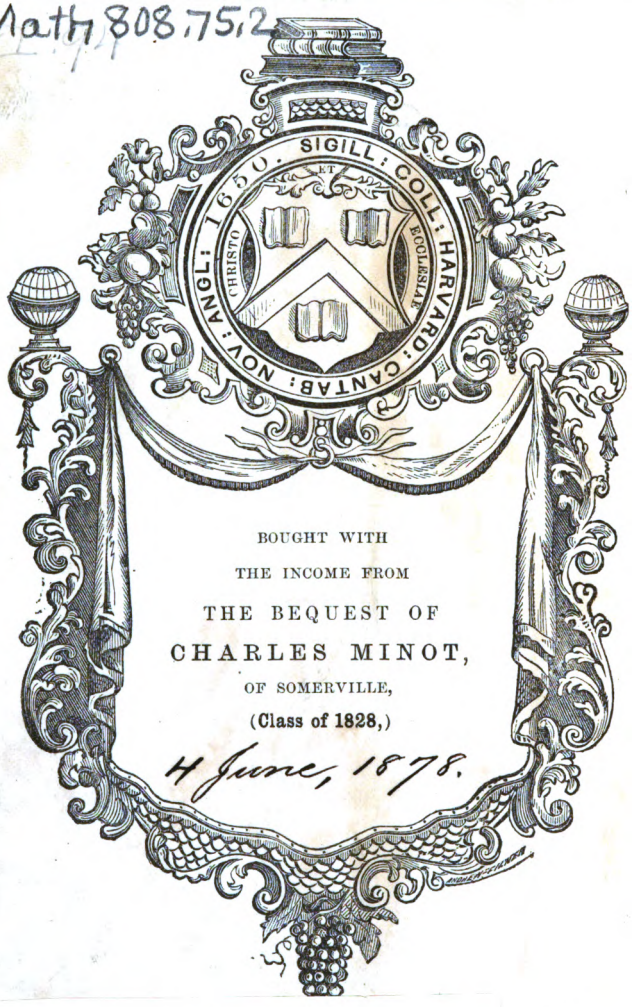
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 808.75.2



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
4 June, 1878.

SCIENCE C

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Leichtfaßlicher

und

praktischer Unterricht

zum

vortheilhaften Gebrauche

der

gemeinen und trigonometrischen

Logarithmen,

um

mittelst derselben die schwierigsten und zusammengesetztesten mathematischen und anderen Rechnungen auf die einfachste und kürzeste Weise auszuführen.

Zum

Selbststudium sowohl, als auch zum Leitfaden in Gymnasien, Lyceen, Militair-, Handels-, Real- und höheren Bürgerschulen eingerichtet

von

Ign. Bernh. Montag,

Lehrer der Arithmetik.

Zweite verbesserte und stark vermehrte Auflage.

Quedlinburg & Leipzig, 1875.

Verlag der Ernst'schen Buchhandlung.

Digitized by Google

~~V2, 94~~
Math 808.75.2

1878, June 4.
Minot fund.

Digitized by Google

I. Gebrauch der gemeinen Logarithmen.

§ 1. Einleitung und Erklärungen.

Nach der Potenzen-Lehre ist $10^2 : 10^2 = 10^{2-2} = 10^0$

aber auch $10^2 : 10^2 = \frac{10^2}{10^2} = 1$

folglich a) $10^0 = 1$,

und dieses giebt den Satz:

die 0te Potenz einer jeden Größe ist = 1.

Ferner da $10^3 : 10^7 = 10^{3-7} = 10^{-4}$

aber auch $10^3 : 10^7 = \frac{10^3}{10^7} = \frac{1.\ 10^3}{10^4.\ 10^3} = \frac{1}{10^4}$,

so folgt, daß auch sein muß b) $10^{-4} = \frac{1}{10^4}$,

d. h.: Eine mit einem negativen Exponenten versehene Größe ist einem Bruche gleich, der 1 zum Zähler, und dessen Nenner aus dieser Größe mit demselben Exponenten, diesen aber positiv genommen, besteht.

§ 2. Erhebt man irgend eine beliebige Zahl, welche wir allgemein durch N bezeichnen wollen, nach und nach zu verschiedenen Potenzen, so bilden die Exponenten die Logarithmen der durch die Zahl N und ihren Exponenten erzeugten Potenz. Die hierbei einfür allemal beliebig angenommene Zahl N nennt man die Wurzel, Basis oder Grundzahl des Logarithmen.

Findet man z. B., daß $N^m = P$

$N^n = Q$

$N^r = R$ u. s. f,

so nennt man nach der so eben gegebenen Erklärung:

Digitized by Google

m den Logarithmen von P, für die Grundzahl = N
n " " " Q, " " " = N
r " " " R, " " " = N

und bezeichnet dieses dadurch, daß man setzt:

m = Log. P; n = Log. Q; r = Log. R ꝛc.

Hätte man z. B. die 8 als Grundzahl angenommen, so ist, weil

$8^3 = 512$, auch die 3 der Logarithme von 512
$8^2 = 64$, " " 2 " " " 64
$8^1 = 8$, " " 1 " " " 8
$8^0 = 1$ (nach § 1. a.), " " 0 " " " 1
$8^{-1} = 1/8$ (nach § 1. b.), " " -1 " " " $1/8$
$8^{-2} = \frac{1}{8^2}$ (nach § 1. b.), $= \frac{1}{64}$ " " -2 " " " $1/64$
$8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$ " " $1/3$ " " " 2
$8^{3/5} = \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{8^3} \cdot \sqrt[3]{8^2} = 8\sqrt[3]{64} = 8\sqrt[3]{4^3} = 32$
auch die $3/5$ der Logarithme von 32
$8^{1/2} = \sqrt{8} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, " " $1/2$ " " von $2\sqrt{2}$
u. s. w.

Der Logarithme einer Zahl ist also nichts anderes, als der Exponent, welcher die Potenz angiebt, zu der die Grundzahl (hier die 8) erhoben werden muß, um jene Zahl als Produkt zu erhalten.

Ein logarithmisches System wird erhalten, wenn man die Grundzahl N, oder wie vorhin die 8, nach und nach zu solchen Potenzen erhebt, daß diese Potenzen die natürliche Zahlenreihe bilden, und werden diese Zahlen mit den ihnen zugehörigen Logarithmen so in Tabellen geordnet, daß man bequem zu jeder Zahl den entsprechenden Logarithmen und umgekehrt, zu jedem Logarithmen die zugehörige Zahl auffinden kann, so erhält man logarithmische Tafeln.

§ 3. Obgleich man jede beliebige Zahl, nur die 1 nicht (weil alle Potenzen von 1 wieder 1 geben), als Grundzahl eines logarithmischen Systems annehmen kann, so hat man doch aus guten Gründen die Zahl 10 als Basis der gemeinen Logarithmen (nämlich derjenigen, welche zur Abkürzung bei praktischen Rechnungen gebraucht, und von ihrem Erfinder, Henry Briggs, einem Schottländer, die briggischen genannt werden) gewählt.

Man nennt die gemeinen Logarithmen auch deshalb die briggischen, um sie durch letztere Benennung von den natürlichen oder den sogenannten nepperschen (von ihrem Erfinder Johann Napier, einem Schottländer), welche nur in der höhern Mathematik gebraucht werden, und deren Grundzahl 2,71828182... ist, zu

Digitized by Google

unterscheiden. Die natürlichen Logarithmen findet man auch nicht in den zum gewöhnlichen Gebrauche bestimmten Logarithmentafeln, sondern nur die briggischen, angegeben.

§ 4. Der Logarithmen Grundeigenschaften.

1) Wenn $N^m = P$
und $N^n = Q$ ist,

so folgt: $N^m \times N_n = PQ$,
oder weil $N^m \times N^n = N^{n+}$

so ist auch $N^{m+n} = PQ$;

und wenn N die Grundzahl des logarithmischen Systems sein soll, so ist auch nach § 2, $m+n = \text{Log. } PQ$. Da nun aber $m = \text{Log. } P$, und $n = \text{Log. } Q$ (nach § 2.), so folgt, daß auch $\text{Log. } P + \text{Log. } Q = \text{Log. } PQ$, und dieses giebt die Regel: **Werden die Logarithmen der Faktoren addirt, so giebt die erhaltene Summe den Logarithmen des Produktes der Faktoren.**

Nun ist aber auch $\text{Log. } P + \text{Log. } Q + \text{Log. } R. = \text{Log. } PQR$; und es gilt sonach die eben gegebene Regel für jede beliebige Anzahl von Größen als Faktoren; man kann daher mit Hilfe der Logarithmen jede Multiplikation durch eine einfache Addition verrichten.

2) Für $N^m = P$
und $N^n = Q$

folgt auch $\frac{N}{N_n} = \frac{P}{Q}$

und weil $\frac{N}{N^n} = N^{-n}$,

so ist auch $N^{m-n} = \frac{P}{Q}$,

und da N die angenommene Grundzahl ist, so folgt hieraus:

$$m - n = \text{Log.} \frac{P}{Q}$$

Es ist aber $m = \text{Log. } P$, und $n = \text{Log. } Q$ (nach § 2), mithin ist auch, wenn man diese Werthe für P und Q setzt:

$$\text{Log. } P - \text{Log. } Q = \text{Log.} \frac{P}{Q}$$

woraus sich die zweite Regel ergiebt, nämlich: **Wird der Logarithme des Divisors vom Logarithmen des Dividenden subtrahirt, so giebt der bleibende Rest den Logarithmen des gesuchten Quotienten.** Mit Hilfe der Logarithmen kann also jede Division durch eine einfache Subtraktion verrichtet werden.

Digitized by Google

3) Für $N^m = P$

ist auch $(N^m)^n = P^n$

oder $N^{n\,m} = P^n$

woraus folgt $n\,m = \text{Log. } P^n$

und weil $m = \text{Log. } P$, so geht hieraus hervor, daß $n \times \text{Log. } P. = \text{Log. } P^n$; und dieser Ausdruck giebt die 3te Regel, nämlich: **Wird der Logarithme einer Größe mit der Zahl n multiplicirt, so bildet das so erhaltene Produkt den Logarithmen der nten Potenz dieser Größe N.**

Jede Potenz einer Größe kann also mit Hilfe der Logarithmen durch eine einfache Multiplikation gefunden werden.

4) Wenn $N^m = P$

so ist auch $\sqrt[n]{N^m} = \sqrt[n]{P}$.

oder weil $\sqrt[n]{N} = N^{\frac{m}{n}}$

so entsteht $N^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{P}$

und hieraus folgt $\frac{m}{n} = \text{Log. } \sqrt[n]{P}$

weil aber $m = \text{Log. } P$, so ergiebt sich

für $\frac{m}{n} = \frac{\text{Log. } P}{n} = \text{Log. } \sqrt[n]{P}$

die vierte Regel, nämlich: **Wird der Logarithme einer Größe N durch irgend eine Zahl n getheilt, so giebt der Quotient den Logarithmen der nten Wurzel dieser Größe N.**

Mittelst der Logarithmen kann man also jede beliebige Wurzel aus einer gegebenen Zahl durch eine einfache Division finden. Diese vier Regeln bilden zusammen die Grundeigenschaften der Logarithmen hinsichtlich ihres Gebrauchs, und es geht aus diesen Grundregeln hervor, daß durch Anwendung der Logarithmen die schwierigsten Rechnungen bedeutend abgekürzt und vereinfacht werden müssen, wenn man sich logarithmischer Tafeln bedient, deren Gebrauch mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

§ 5. Da nach § 3, 10 die Grundzahl der gemeinen Logarithmen bildet, und $10^0 = 1$ (nach § 1) ist, so folgt, daß auch $0 = \text{Log. } 1$, ferner weil $10^1 = 10$ " " " " $1 = \text{Log. } 10$

mithin ergiebt sich, daß die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen 1 und 10 liegen, **größer** als 0, und **kleiner** als 1 sind. Zwischen 1 und 10 aber liegen alle einstelligen Zahlen, nämlich: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9, zwischen 0 und 1 aber nur ächte Brüche, woraus folgt, **daß die Logarithmen aller einziffrigen Zahlen ächte Brüche sind.**

Digitized by Google

Ferner weil $10^1 = 10$, also auch $1 = \text{Log. } 10$.
$10^2 = 100$, „ „ $2 = \text{Log. } 100$,

und zwischen 10 und 100 alle zweistellige Zahlen liegen, so folgt: daß die Logarithmen aller zweistelligen Zahlen zwischen 1 und 2 liegen, d. h. sie sind größer als 1 und kleiner als 2, bestehen also aus 1 und einem ächten Bruche. Ebenso weil $10^2 = 100$, also auch $2 = \text{Log. } 100$
und $10^3 = 1000$, „ „ $3 = \text{Log. } 1000$, und zwischen 100 und 1000 alle dreistelligen Zahlen liegen, so folgt: daß der Logarithme einer jeden dreistelligen Zahl größer als 2, aber doch kleiner als 3 ist, d. h. aus 2 und einem ächten Bruche besteht. Ebenso ergiebt sich, daß der Logarithme einer jeden vierstelligen Zahl aus 3 und einem ächten Bruche, und der Logarithme einer fünfstelligen Zahl aus 4 und einem ächten Bruche besteht, und ersterer größer als 3, aber kleiner als 4, letzterer hingegen größer als 4, und kleiner als 5 sein müsse u. s. f. Bezeichnet man nun jeden dieser ächten Brüche, welche in den logarithmischen Tafeln als siebenstellige Decimalbrüche ausgedrückt sind, durch z, so ist

der Logarithme jeder einstelligen Zahl $= 0 + z$,
„ „ „ zweistelligen „ $= 1 + z$,
„ „ „ dreistelligen „ $= 2 + z$,
„ „ „ vierstelligen „ $= 3 + z$ ꝛc., überhaupt
„ „ „ nstelligen „ $= (n-1) + z$,

und nennt hierbei die ganzen Einheiten, welche zu einem Logarithmen gehören, die Charakteristik, den angehängten ächten Bruch aber, welcher, wie schon bemerkt, in den logarithmischen Tafeln als siebenstelliger Decimalbruch ausgedrückt ist, die Mantisse. Heißt es daher z. B.

$$\text{Log. } 109 = 2 + z = 2{,}0374265,$$

so bildet 2 die Charakteristik (Kennziffer), z oder 0374265 aber die zugehörige Mantisse von Log. 109.

Aus den vorhin angegebenen Werthen der gemeinen Logarithmen von ein-, zwei-, drei-, vier- und überhaupt nstelligen Zahlen ergiebt sich die allgemeine Regel: daß die Charakteristik eines gemeinen Logarithmen (also im briggischen Systeme) immer aus einer um 1 kleineren Zahl besteht, als die zu diesem Logarithmen zugehörige Zahl Stellen hat. Umgekehrt aber hat die zu einem Logarithmen gehörige Zahl (Numerus) immer eine Stelle mehr, als Einheiten die Charakteristik hat, aus welchem Grunde man auch die ganzen

Digitized by Google

Einheiten der Logarithmen mit dem Namen Charakteristik (d. h. Kennziffer) belegt.

§ 6. Die Einrichtung der logarithmischen Tafeln und Auffindung der Logarithmen mittelst derselben insbesondere.

Die in Deutschland gebräuchlichsten und in jeder Hinsichst vorzüglichsten logarithmischen Tafeln sind die von Vega, welche Seite 2 bis 5, unmittelbar die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 999 auf sieben Decimalstellen berechnet, enthalten. Von Seite 6 bis 187 findet man für die Logarithmen aller Zahlen von 1000 bis 100999 nur die Mantisse, ebenfalls auf sieben Decimalstellen, nicht aber die zugehörige Charakteristik angegeben, weil diese nach § 5 aus der Anzahl Stellen, woraus die gegebene Zahl besteht, ohnehin schon bekannt ist.

Die fernere Einrichtung der Vega'schen Tafeln besteht noch in Folgendem: Auf einer jeden Seite derselben enthält die erste linksstehende senkrechte, mit N (d. h. Numerus oder Zahl) über- und unterschriebene Reihe fünfzig genau aufeinander folgende Zahlen, so daß man in dieser Reihe von Seite 6 an bis Seite 185 jede vierstellige Zahl unmittelbar findet. Rechts neben einer solchen Zahl findet man nur die Mantisse des zugehörigen Logarithmen auf sieben Decimalstellen angegeben. Neben dieser ersten mit N überzeichneten Vertikalreihe befinden sich noch zehn andere, welche der Reihe nach mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ebenfalls über- und unterschrieben sind; alle diese Spalten sind mit lauter vierziffrigen Zahlen angefüllt, mit Ausnahme der mit 0 überzeichneten, welche außer den vierstelligen Zahlen noch besonders angegebene dreistellige enthält. Diese dreiziffrigen Zahlen bilden durchgehends die drei ersten Decimalstellen der Logarithmen, und die in derselben Spaltreihe wie in den übrigen noch vorkommenden vierstelligen Zahlen geben immer die vier letzten Decimalstellen.

Soll nun z. B. mit Hilfe dieser Tafeln der Logarithme der Zahl 4783 gefunden werden, so sucht man diese Zahl in der mit N überzeichneten ersten Spalten auf, und findet solche Seite 81. Es ist demnach Log. 4783 = 3,6797004, wo die Charakteristik aus der Zahl selbst schon bekannt ist, die drei ersten Decimalstellen aber, nämlich 679, sind die neben der Zahl 4776 in derselben mit N überschriebenen Spalte etwas weiter heraufstehenden, und gelten für alle Zahlen von 4776 bis 4787; und weil ferner neben der gegebenen Zahl 4783 noch die vierziffrige Zahl 7004 sich befindet, so bezeichnet solche die vier letzten Decimalstellen der Mantisse von Log. 4783.

Hat man aber den Logarithmen einer fünfstelligen Zahl zu finden,

Digitized by Google

so sucht man wie vorhin die vier ersten oder höchsten Stellen derselben als besondere Zahl in der mit N überzeichneten senkrechten ersten Zahlenspalte auf, geht in derselben Zeile, wo diese vier Stellen sich befinden, rechts quer herüber bis zu der Spalte, deren Ueber- oder Unterschrift die fünfte oder niedrigste Stelle der gegebenen Zahl ist, und die vier Ziffern, welche man hiervorfindet, geben die vier letzten Decimalstellen des gesuchten Logarithmen, die drei ersten Stellen desselben aber werden, wie vorhin in der mit 0 überschriebenen Spaltreihe unmittelbar neben der vierstelligen Zahl in der Spalte N gefunden, oder weiter oben, wenn neben der gegebenen Zahl unmittelbar nichts angegeben sein sollte. Wollte man hiernach z. B. den Logarithmen von 64728 auffinden, so sucht man zuerst die Zahl 6472 in der N-Spalte, wo dieselbe Seite 115 gefunden wird, und geht von da in der Horizontalzeile rechts gerade herüber bis in die mit 8 überzeichnete Spalte (weil 8 die fünfte Stelle der gegebenen Zahl ist), wo man die vier letzten Stellen = 0922 des gesuchten Logarithmen findet. Unmittelbar neben den vier ersten Stellen der gegebenen Zahl stehen die zugehörigen drei ersten Decimalstellen 811. Es ist sonach die vollständige Mantisse des gesuchten Logarithmen = 8110922, und weil die gegebene Zahl aus fünf Ziffern oder Stellen besteht, so ist die entsprechende Charakteristik 5 — 1 = 4; folglich ist Log. 64728 = 4,8110922. Hätte man aber den von Log. 64795 aufzufinden, so wird zuerst 6479 in der N-Spalte gesucht, und findet in derselben Zeile nach rechts, in der mit 5 (als der fünften Stelle der Zahl) überschriebenen Vertikalreihe, die vier letzten Decimalstellen 5415 des gesuchten Logarithmen. Gleich rechts neben der Zahl 6479 in der Spalte N findet man die drei ersten Decimalstellen unmittelbar nicht angegeben, es gilt daher für dieselben die nächste weiter oben stehende Zahl 811, und die vollständige Mantisse ist sonach 8115415, und weil die gegebene Zahl 64795 fünfstellig ist, so ist ihre Charakteristik 5 — 1 = 4; und sonach Log. 64795 = 4,8115415.

Findet man beim Nachschlagen der Mantisse, bei den letzten vier Decimalstellen ein Sternchen * oder unter der 1. dieser vier Stellen einen kleinen Strich, so zeigt dieses an, daß die drei ersten Decimalstellen in der mit 0 überschriebenen Spalte, nicht die zunächst oberen, oder in derselben Reihe befindlichen, sondern die nächst darauf folgenden unteren drei Stellen genommen werden müssen. Soll z. B. Log. 64867 nachgeschlagen werden, so findet man Seite 115 die vier letzten Decimalstellen = * 0238 od. 0238. Wegen dem vorstehenden Sternchen od. Striche sind also die drei ersten Decimalstellen nicht = 811, sondern es gilt für dieselben die nächstfolgende, weiter unten stehende Zahl 812, und es ist also Log. 64867 = 4,8120238.

Digitized by Google

§ 7. Soll umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl aufgefunden werden, so läßt man die Charakteristik einstweilen unberücksichtigt, und sucht die drei ersten Decimalstellen des gegebenen Logarithmen in der mit 0 überschriebenen Spaltreihe, die übrigen vier Decimalstellen aber über oder unter den übrigen vierstelligen Zahlen, welche rechts der drei ersten Stellen sich befinden, auf. Die Ueber- oder Unterschrift derjenigen Spalte, in welcher die vier letzten, wenn auch um etwas größer oder kleineren Decimalstellen gefunden werden, giebt die fünfte Stelle der gesuchten Zahl, und in derselben Zeile, in welcher jene vier letzten Decimalstellen sich befinden, stehen in der mtt N überschriebenen Spalte die vier ersten Stellen der gesuchten Zahl. Schneidet man nun von der so gefundenen fünfstelligen Zahl von der Linken zur Rechten eine Stelle mehr ab, als Einheiten die Charakteristik hat, so ist die zum gegebenen Logarithmen gehörige Zahl dadurch vollkommen bestimmt. Soll z. B. die Zahl aufgefunden werden, deren Logarithmen 2,7616497 ist, so findet man die drei ersten Stellen der Mantisse 761 auf Seite 101, die folgenden vier Decimalstellen 6497 aber stehen in der mit 3 überschriebenen senkrechten Zahlenreihe daselbst. In derselben Zeile, wo die vier letzten Decimalstellen sich befinden, steht in der mit N überzeichneten Columne vorn an die Zahl 5776, daher sind dies die vier ersten Stellen, und die Ueberschrift 3 (der vier letzten Decimalstellen) giebt die fünfte Stelle der gesuchten Zahl, welche hiernach = 57763 sein würde, wenn 4 als Charakteristik gegeben wäre. Da aber in gegenwärtigem Beispiele die Charakteristik nur 2 ist, so hat die gesuchte Zahl auch nur drei Stellen links vor dem Komma, und es ist sonach die gesuchte Zahl, welche dem gegebenen Logarithmen 2,7616497 entspricht, = 577,63. Findet man aber die vier letzten Decimalstellen des gegebenen Logarithmen nicht genau in den Tafeln, so werden, wie schon bemerkt, nach Verhältniß entweder die vier nächst kleineren, oder die vier nächst größeren Stellen, und zwar diejenigen, welche den gegebenen vier letzten Stellen am nächsten liegen, genommen. Hiernach z. B würde zu dem Logarithmen 2,8054768 die Zahl 638,96 (deren Logarithme 2,8054737 ist) gehören; und dem Logarithmen 1,5557803 die Zahl 35,957 (deren Logarithme 1,5557835 ist) entsprechen. Regel aber ist es, daß man immer die nächst vorhergehenden kleineren Stellen benutzt, wenn die zu einem gegebenen Logarithmen gehörige Zahl auf mehr als fünf Stellen genau gefunden werden soll.

Zusatz. Da, wenn man ganz allgemein $10^n = N$ setzt, N desto größer wird, je größer man n annimmt, so folgt, daß einer größeren Zahl ein größerer Logarithme, und umgekehrt, dem größeren Logarithmen auch eine größere Zahl zukömmt.

Digitized by Google

§ 8. Das Auffinden der Logarithmen für Decimalbrüche.

Es sei Log. N = n (so, daß n zugleich die Charakteristik bedeutet), so ist Log. $\frac{N}{10}$ = Log. N—Log. 10 = n — 1 (weil Log. Log. N = n, und Log. 10 = 1 ist); ferner Log. $\frac{N}{100}$ = Log. N — Log. 100 = n — 2 (weil log. N=n, und log. 100 = 2 ist), und Log. $\frac{N}{1000}$ = Log. N — 1000 = n, — 3 (weil Log. N = n, und Log. 1000 = 3 ist); u. s. f.

Wird nämlich eine Zahl N durch 10, 100, 1000 u. s. f. dividirt, so wird dadurch die Carakteristik n des Logarithmen dieser Zahl um 1, 2 oder 3 ꝛc. kleiner, die Mantisse aber bleibt unveränderlich dieselbe.

Kennt man sonach den Logarithmen irgend einer ganzen Zahl, so ist auch der Logarithmen dieser Zahl für den Fall bekannt, wenn diese Zahl einen Decimalbruch vorstellt, d. h. wenn einige Stellen derselben von den übrigen durch ein Komma getrennt sind, denn alsdann besteht die Charakteristik des gesuchten Logarithmen aus einer Einheit weniger, als Stellen sich vor dem Komma des gegebenen Decimalbruches befinden. So z. B. ist Log. 50817 = 4,7060090,

daher ist auch Log. 5081,7 = 3,7060090,
ebenso Log. 508,17 = 2,7060090,
mithin auch Log. 50,817 = 1,7060090,
und Log. 5,0817 = 0,7060090.

Soll daher zu einem Decimalbruche der zugehörige Logarithme aufgefunden werden, so läßt man das Komma bei demselben gänzlich außer Acht, und sieht den Decimalbruch als eine ganze Zahl an, zu der nun wie bekannt der entsprechende Logarithme gesucht wird. Die Charakteristik dieses Logarithmen aber wird nach den Stellen vor dem Komma, wie bei einer jeden anderen ganzen Zahl bestimmt, nämlich man nimmt dieselbe um eine Einheit kleiner, als die Anzahl der Stellen vor dem Komma beträgt. Soll z. B. Log. 52,847 gesucht werden, so nimmt man die Mantisse des Logarithmen der ganzen Zahl 52847, und weil 52,847 zwei Stellen vor dem Komma hat, so ist die der gefundenen Mantisse 7230203 vorzusetzende Charakteristik = 2 — 1 = 1, und mithin der entsprechende Logarithme von 52,847 = 1,7230203.

Zusatz. Will man nach den bis jetzt gegebenen Regeln den Lo-

Digitized by Google

garithmen einer Zahl nachschlagen, welche weniger als fünf Stellen hat, so braucht man nur die fehlenden Stellen durch Nullen zu ergänzen, und sodann wie vorhin zu verfahren. So z. B. ist

Log. 492 = Log. 492,00 = 2,6949851,
„ 35 = „ 35,000 = 1,5440680,
„ 7 = „ 7,0000 = 0,8450980,
„ 2935 = „ 2935,0 = 3,4676081.

Enthält aber der gegebene Decimalbruch anstatt der Ganzen, 0 vor dem Komma, so sucht man wie bekannt nur zu den giltigen Ziffern desselben die entsprechende Mantisse, giebt derselben 0 zur Charakteristik, zieht aber von derselben am Ende des so gefundenen Logarithmen durch das Subtraktionszeichen (—) so viele Einheiten wieder ab, als Nullen der ersten giltigen Ziffer des gegebenen Decimalbruchs (die 0 vor dem Komma mitgerechnet) vorangehen. Hiernach z. B. findet man für Log. 0,58217 = 0,7650498 — 1,
„ 0,09736 = 0,9883806 — 2,
„ 0,00894 = 0,9513375 — 3,
und für Log. 0,00000073624 = 0,8670194 — 7 ꝛc.

Die eigentliche Charakteristik des Logarithmen eines ächten Decimalbruches, welche vorn = 0 genommen wird, ist also negativ, und besteht aus so vielen Einheiten, als am Ende des gefundenen Logarithmen durch das Subtraktionszeichen angegeben sind, weshalb man dieselben auch die negative Characteristik des Logarithmen nennt. Da z. B. im Decimalbruche des letzten Beispiels die sieben ersten Stellen desselben Nullen sind, so mußte der entsprechende Logarithme vorne 0, am Ende aber — 7 als negative Charakteristik angehängt bekommen.

§ 9. Ist umgekehrt ein Logarithme mit einer negativen Charakteristik gegeben, so gehört zu demselben eine Zahl, die ein echter Decimalbruch ist, und dessen erste Stellen Nullen sind, so daß die Zahl aller Nullen, die vor dem Komma stehende mitgerechnet, der Zahl der Einheiten gleich ist, aus welcher die negative Characteristik besteht. Hiernach z. B. findet man zu dem Logarithmen 0,6478962 — 4, ohne Rücksicht auf die negative Charakteristik zu nehmen, die Zahl 44452, und da die eigentliche Charakteristik des gegebenen Logarithmen — 4 ist, so muß man der gefundenen Zahl links vier Nullen vorsetzen, und die vorderste derselben durch das Komma abschneiden. Die dem gegebenen Logarithmen 0,6478962 entsprechende Zahl ist daher = 0,00044452. Ebenso findet man, daß 0,5498213 — 1 = Log. 0,35467 ist, wo wegen der negativen Charakteristik = — 1, der gefundenen Zahl 35467 nur eine Null, die aber noch als Zeichen der Abwesenheit der Ganzen durch das Komma abzuschneiden ist, vorgesetzt werden muß.

Digitized by Google

§ 10. Das Auffinden der Logarithmen für sechs- und siebenstellige Zahlen.

Die von Seite 6 bis 187 auf jeder Seite des logarithmischen Handbuchs von Vega, zur Rechten stehende letzte, mit P. P. (d. h. Partes proportionales oder Proportionaltheile) über-, und mit Differ. oder Diff. unterzeichnete doppelte, auch wohl dreifache Spalte enthält ein-, zwei- oder auch mehrmal die Zahlen von 1 bis 9 untereinander stehend, und neben derselben sind Zahlen befindlich, welche ausdrücken, um wie viel ein Logarithme sich ändert, wenn die zu demselben gehörige Zahl, außer den fünf in den Tafeln zu findenden Stellen noch eine sechste Stelle hat. Die obersten Zahlen der einzelnen Abtheilungen in dieser Spalte zeigen als Ueberschrift die herrschende Differenz (Diff.) an, nämlich wie viel in dieser Gegend der Tafel die Differenz beträgt, welche erhalten wird, wenn man die Logarithmen zweier nur um eine Einheit verschiedenen Zahlen von einander abzieht. So z. B. findet man Seite 145 in der mit P. P. überschriebenen Doppelspalte die beiden Ueberschriften 55 u. 54, wodurch angedeutet wird, daß, wenn man zu den auf dieser Seite befindlichen Zahlen von 79500 bis zu 79999 die Logarithmen sucht, diese für zwei unmittelbar auf einander folgende Zahlen in der oberen Hälfte Hälfte um 55, in der unteren aber um 54 von einander verschieden sind. Wo die Ueberschrift 55 ist, befindet sich z B. rechts neben der 8 die Zahl 44, und diese zeigt an, daß, wenn die sechste Stelle einer Zahl 8 ist, zu dem Logarithmen der fünf ersten Stellen noch 44 addirt werden muß, um den Logarithmen der gegebenen sechsstelligen Zahl vollständig zu erhalten.

Hieraus ergiebt sich nun für den Gebrauch dieser Proportionaltheile folgende einfache Regel, nämlich: „Soll zu einer sechsziffrigen Zahl der ihr zugehörige Logarithme aufgefunden werden, so sucht man zuerst den vollständigen Logarithmen für die fünf ersten Stellen der gegebenen Zahl, und unter der entsprechenden herrschenden Differenz die Zahl, welche wegen der sechsten Stelle der gegebenen Zahl zu dem für die fünf ersten Stellen gefundenen Logarithmen noch addirt werden muß. Die herrschende Differenz selbst aber ergiebt sich, wenn man die vier letzten Stellen des gefundenen Logarithmen der fünf ersten Stellen der gegebenen sechsstelligen Zahl, von den vier letzten Stellen des Logarithmen der nächstfolgenden um 1 größeren fünfstelligen Zahl abzieht. Ist z. B. die gegebene Zahl, deren Logarithme gesucht wird, 0,959478, so findet man in den Tafeln Seite 177 Log. 0,95947 = 0,9820314 — 1 (nach § 8). Es sind also

Digitized by Google

die vier letzten Stellen des Logarithmen = *0314(0341), die vierletzten Stellen des folgenden Logarithmen 0,95948 = *0359(0341), folglich ist die entsprech. herrsch. Differenz 0359 — 0314 = 45. Nun ist die sechste Stelle der gegebenen Zahl 8, und neben derselben rechts bei der herrschenden Differenz 45 steht 36, diese muß nun zum bis jetzt gefundenen Logarithmen = 0,9820314 — 1 addirt werden; also wegen der sechsten Stelle = 8 +36 u. es ist sonach der gesuchte Logarithme v. 0,95947 = 0,6820350 — 1.

Soll ferner zu einer siebenstelligen Zahl der entsprechende Logarithme gefunden werden, so sucht man zuerst nach voriger Regel den Logarithmen für die sechs ersten Stellen derselben, und addirt hierzu noch $^1/_{10}$ desjenigen Proportionaltheils, welcher unter der herrschenden Differenz rechts neben der siebenten Stelle der gegebenen Zahl steht, weil die siebente Stelle einer Zahl einen 10mal kleineren Werth als die nächst vorhergehende sechste Stelle derselben hat. Sollte hiernach z. B. der Logarithme der Zahl 7362,859 nachgeschlagen werden, so findet man zuerst für Log. 7362,8 = 3,8670430 und die herrschende Differenz ist 0489—0430 = 59, daher muß wegen der sechsten Stelle 5 die Zahl 30 und wegen der siebenten Stelle 9 noch die Zahl $\frac{53}{10}$ oder 5,3 addirt werden. Der entsprechende Logarithme von 7362,859 ist also = 3,8670465.

§ 11. Soll umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmen die dazu gehörige sechs- oder siebenstellige Zahl nachgeschlagen werden, findet denselbbn aber nicht genau in den Tafeln, so nimmt man dafür den nächst vorhergehenden kleineren, und erhält durch diesen die fünf ersten Stellen der gesuchten Zahl. Dieser nächst kleinere Logarithme wird nun vom gegebenen subtrahirt, und der hier bleibende Rest unter den entsprechenden Proportionaltheilen da gesucht, wo die herrschende Differenz (P. P.) die Ueberschrift bildet. Findet man hier den Rest nicht genau, so nimmt man die nächst kleinere Zahl, und links neben derselben steht nun die sechste Stelle der gesuchten Zahl. Der so eben unter der herrschenden Differenz in deren zweiten Columne genommene Proportionaltheil wird vom ersten Reste abgezogen, dem so bleibenden Reste rechts eine 0 angehängt, und dieser nun 10mal größere Rest wieder unter derselben herrschenden Differenz aufgesucht, so giebt die links danebenstehende Ziffer die siebente Stelle der gesuchten Zahl.

Digitized by Google

Z. B.: Welche Zahl entspricht dem Log. x = 0,7835925—1?
In den Tafeln findet man Log. 0,60756 = 0,7835892—1
+

die herrschende Diff. ist hier 71 — Rest = 33
daher ist die sechste Stelle = 4, und steht neben 28
50
und die siebente Stelle ist = 7, und steht neben 50

die gesuchte Zahl ist also = 0,6075647.

Zusatz 1. Wird der gegebene Logarithme, wie z. B. 2,9767259 genau in den Tafeln gefunden, so ist die sechste und siebente Stelle der zugehörigen Zahl jede eine 0. Eben so ist die siebente Stelle der zu einem gegebenen Logarithmen gehörigen Zahl = 0, sobald kein zweiter Rest bleibt, wie z. B. bei 6,9820350 = Log. 9594780.

Zusatz 2. Für Zahlen, welche mehr als sieben Stellen haben sind die Logarithmen, welche nur auf sieben Decimalstellen berechnet sind, nicht mehr zuverlässig, und es läßt sich daher auch umgekehrt zu einem Logarithmen mit sieben Decimalstellen, die zugehörige Zahl nur auf sieben Stellen richtig angeben. Will man daher die Logarithmen von acht oder noch mehrstelligen Zahlen mit einiger Zuverlässigkeit haben, so muß die Mantisse der zu benutzenden logarithmischen Tafeln wenigstens bis auf 10 Decimalstellen gehen, und auf so viel Stellen sind auch die Logarithmen in den größeren Tafeln, z. B. im Thesaurus logarithm. compl. von Vega berechnet.

§ 12. Gebrauch der Logarithmen.

Die Logarithmen werden benutzt um durch sie die Rechnungen abzukürzen, und leisten besonders dann wesentliche Dienste, wenn viele u. große Multiplicationen u. Divisionen, od. Potenzen u. Wurzeln vorkommen.

Aus den unter § 4 angeführten Grundeigenschaften der Logarithmen ergeben sich nun folgende praktische Regeln:

1) Werden die Logarithmen zweier oder mehrerer Zahlen addirt, so erhält man den Logarithmen ihres Produkts, und wird zu diesem Logarithmen die entsprechende Zahl in den Tafeln nachgeschlagen, so giebt diese das gesuchte Produkt der gegebenen Faktoren. Z. B.:

Welches ist das Produkt von 947,82 × 38,546 × 7,698?

Berechnung. Es ist log. 38,546 = 1,5859793
" 7,698 = 0,8863779
" 947,825 = 2,9767259

folglich ist der Logerithme des Produkts = 5,4490831. Nun findet man in den Tafeln den Logarithm. von = 5,4490771 = 28124

Digitized by Google

(die herrschende Differ. ist 0925—0771 = 154) Rest = 60
daher erhält man für die sechste Stelle neben 46 . . 1
140
und für die siebente Stelle 139 die . 9
folglich ist das gesuchte Produkt obiger Faktoren = 281241,9.

2) Wenn man den Logarithmen eines Nenners oder Divisors, oder die Summe der Logarithmen mehrerer Faktoren des Divisors, von dem Logarithmen des Zählers oder Dividenden, oder der Summa der Logarithmen mehrerer Faktoren des Dividenden subtrahirt, so giebt der Rest den Logarithmen des Quotienten der beiden Zahlen oder Produkte. Z. B.

Welches ist der Werth oder Quotient von $x = \frac{37854}{4783,6} = \frac{Z}{N}$?

Hier ist Log. Z oder Log. 37854 = 4,5781118
davon subtrahirt Log. N oder Log. 4783,6 = 3,6797549

bleibt für Log. $\frac{Z}{N}$ = 0,8983569

und weil zu diesem Logarithmen die Zahl 7,9133 gehört, so ist auch x oder $\frac{37854}{4783,6} = 7,9133$.

Welchen Werth hat der Ausdruck: $x = \frac{385,47 \times 7,678 \times 9478,2}{678,23 \times 4523,6}$?

Auflösung. Nach voriger Regel addirt man zuerst die Logarithmen der drei Faktoren des Zählers, so wird durch deren Summe der Logarithmen des Zählers erhalten; und man erhält den Logarithmen des Nenners durch die Addition der Logarithmen der Faktoren desselben. Die letztere Summe von der erstern abgezogen, giebt den Logarithmen des Quotienten, und wird zu demselben die entsprechende Zahl gesucht, so ist diese der gesuchte Werth oder Quotient von $x = \frac{Z}{N}$.

Nun ist Log. 385,47 = 2,5859906
+ Log. 7,678 = 0,8852481
+ Log. 9478,2 = 3,9767259
also Log. Z = 7,4479646
hiervon ab Log. N = 6,4868612
bleibt Log. $\frac{Z}{N}$ = 0,9611034

Ferner Log. 4523,6 = 3,6554842
+ Log. 678,23 = 2,8313770
also Log. N = 6,4868612

Da nun zu Log. x = 0,9611034 die Zahl 9,1433 gehört, so ist diese auch der Werth oder Quotient des obigen Zahlenausdruckes.

Digitized by Google

Auf diese Weise kann man auch alle Regeldetri-Beispiele berechnen, indem man nur die Summe der Logarithmen der beiden ganzen Zahlen, welche die mittelsten Glieder bilden, addirt, von ihrer Summe den Logarithmen des ersten Gliedes abzieht, und endlich zum Logarithmen des bleibenden Restes die entsprechende Zahl nachschlägt, so ist diese die gesuchte vierte oder unbekannte Größe des Ansatzes.

Beim Gebrauche der Logarithmen ist noch zu beachten:

a) Befinden sich unter den Faktoren des Zählers oder des Nenners einige einfache Faktoren, die leicht miteinander multiplicirt werden können, so vereinige man solche zuvor in ein Produkt, bevor man sich der Logarithmen bedient. Hierdurch wird die Anzahl der erforderlichen Logarithmen verringert, was allerdings abkürzend ist.

b) Bei dem Nachschlagen der Logarithmen gewährt es auch eine Erleichterung, wenn man dieselben für die vorkommenden Zahlen in der Ordnung aufsucht, wie sie nach ihren höchsten Ordnungen auf einander folgen. So z. B. würde, wenn man für die Zahlen: 9,875; 1297,8; 721,104; 3521 u. 5620,3 die entsprechenden Logarithmen nachschlagen wollte, dieses der Reihe nach von den Zahlen: 1297,8; 3521; 5620,3; 721,104 und 9,875 geschehen müssen.

Um sich der Logarithmen sowohl beim Reesischen- als auch beim Kettensatze möglichst vortheilhaft zu bedienen, beachte man außer dem vorhin unter a) und b) Gesagten noch: daß man gemeinschaftliche Faktoren der beiden gegenseitig zu verkleinernden Columnen, wenn sie erst durch langweiliges Suchen ausgemittelt werden müßten, oder deren Wegschaffung eine mühsame Division nöthig machen würde, lieber unbeachtet lasse, da man immer das Resultat auf dem möglichst einfachsten Wege zu erhalten suchen muß. Z. B.:

Ein Stück seidenes Zeug, welches $28\frac{7}{8}$ Aunes (franz. Elle) hält, kostete $317\frac{3}{4}$ Francs; wieviele leipziger Ellen bekommt man daher von diesem Zeuge für $4\frac{1}{2}$ Friedrichsd'or, wenn 20 Friedrichsd'or $108\frac{1}{2}$ Thlr. Cour. betragen, und 300 Francs $= 78\frac{1}{4}$ Thlr. Cour. sind. Die Aune hält $526\frac{5}{6}$ französische Linien, und die leipziger Elle hält $250\frac{3}{5}$ französ. Linien.

Ansatz und Berechnung stehen hier wie folgt:

2 . 2	x leipz. Ellen $= 4\frac{1}{2}$ Frd'or.?	9
, 6 . 20 a)	$20 = 108\frac{1}{2}$ Thl. Cour.	4 . 4 . 5 a)
313	$78\frac{1}{4} = 300$ Francs.	217
1271	$317\frac{3}{4} = 28\frac{7}{8}$ Aunes.	300
1253	$1 = 526\frac{5}{6}$ frz. Linien	231
	$250\frac{3}{5} = 1$ leipz. Elle.	3161

rkleinert man hier gegenseitig die mit a bezeichneten Zahlen soviel möglich, so erhält man für den Werth von x den Zahlenausdruck:

Digitized by Google

$$x = \frac{9 \cdot 217 \cdot 25 \cdot 231 \cdot 3161}{2 \cdot 2 \cdot 313 \cdot 1253 \cdot 1271} = \frac{225 \times 217 \times 231 \times 3161}{1252 \times 1253 \times 1271}.$$

Nun ist Log. 217 = 2,3364597 Ferner Log. 1252 = 3,0976043
„ 225 = 2,3521825 „ 1253 = 3,0979511
„ 231 = 2,3636120 „ 1271 = 3,1041456
„ 3161 = 3,4998245 also Log. N = 9,2997010

Folglich Log. Z = 10,5520787
hiervon Log. N = 9,2997010

bleibt Log. x = 1,2523777, und da zu diesem Logarithmen die Zahl 17,880 gehört, so ist auch x = 17,38; d. h.: man erhält für $4\frac{1}{2}$ Frd'or $17,88 = 17\frac{22}{25}$ leipziger Ellen Zeug.

3) Hat man eine Zahl zu irgend einer Potenz zu erheben, so braucht man, um den Logarithmen dieser Potenz zu erhalten, nur die Wurzel (d. h. die zu erhebende Zahl) mit ihrem Exponenten zu multipliciren, und zu dem hier erhaltenen Logarithmen die entsprechende Zahl, wie bekannt, in den Tafeln nachzuschlagen, so enthält dieselbe die gesuchte Potenz. Z. B.:

Welches ist die Potenz von $\left(\frac{837,93}{567,32}\right)^5$?

Hier ist nach den Tafeln Seite 153, Log. 837,93 = 2,9232077
subtrahirt Log. 567,32 = 2,7538281

folglich Log. $\left(\frac{837,93}{567,32}\right)$ = Log. $\left(\frac{Z}{N}\right)$ = 0,1693796

Wird dieser Logarithmen mit dem gegebenen Exponenten 5 multiplicirt, so erhält man den Logarithmen 0,8468980, zu welchem nach Seite 126 in den Tafeln die Zahl 7,0291 gehört, und es ist also $\left(\frac{837,93}{567,32}\right)^5 = 7,0291$.

4) Soll aus einer Zahl irgend eine Wurzel gezogen werden, so braucht man nur den Logarithmen dieser Zahl durch den Wurzelexponenten zu theilen, welcher angiebt, die wievielste Wurzel gefunden werden soll. Sucht man zu dem Logarithmen des so erhaltenen Quotienten die entsprechende Zahl, so ist dieselbe die gesuchte Wurzel.

Z. B.: Welches ist die $\sqrt[7]{}$ aus 128?

Auflösung. Es ist $\sqrt[7]{128} = \frac{\text{Log. } 128}{7} = \frac{2,1072100}{7} = 0,3010300$;

und da zu diesem Logarithmen die Zahl 2,0000 gehört, so ist auch

$$\sqrt[7]{128} = 2.$$

Digitized by Google

Wollte man umgekehrt wissen, die wievielte Potenz eine gegebene Zahl, z. B. 9261, von einer anderen, z. E. 21 sei, so braucht man nur den unbekannten Grad der Potenz n zu nennen, und für gegenwärtigen Fall zu schreiben: $21^n = 9261$; so ist n Log. 21 = Log. 9261, und hieraus folgt: $n = \frac{\text{Log. } 9261}{\text{Log. } 21}$. Nun ist Log. 9261 = 3,9666579, und Log. 21 = 1,3222193; mithin auch

$$n = \frac{\text{Log. } 9261}{\text{Log. } 21} = \frac{3{,}9666579}{1{,}3222193} = 3.$$

Wirklich ist $21^3 = 9261$. — (Man dividirt übrigens Logarithmen durch Logarithmen, wie man Decimalbrüche durch einander theilt.)

§ 13. Die Logarithmen ächter Brüche.

Ist N größer als Z, so ist $\frac{Z}{N}$ ein ächter Bruch, und Log. $\frac{Z}{N}$ = Log. Z — Log. N. Da nun zu einer größeren Zahl auch ein größerer Logarithme gehört, so folgt, daß Log. Z — Log. N etwas Negatives gaben muß, und es sind hiernach die Logarithmen ächter Brüche negativ.

Die Logarithmen ächter Brüche werden gefunden, wenn man Log. N von Log. Z abzieht, oder weil dies nicht geht, Log. Z von Log. N, und dem Reste, als dem gesuchten Logarithmen, das Zeichen — vorsetzt. Hiernach ist z. B. Log. $\frac{3}{8}$ = — (Log. 8 — Log. 3) = — (0,9030900 — 0,4771213) = — 0,4259687.

Umgekehrt ist die zu einem negativen Logarithmen gehörige Zahl einem Bruche gleich, der 1 zum Zähler, und die zu diesem Logarithmen (solchen positiv genommen) gehörige Zahl zum Nenner hat. Z. B. Von welcher Zahl ist — 1,3779134 der Logarithmen?

Auflösung. Weil 1,3779134 = Log. 23,875, so ist auch —1,3779134 Log. $= \frac{1}{23{,}875} = \frac{1000}{23875} = \frac{8}{191}$; denn sucht man nach voriger Regel Log. $\frac{8}{191}$ = — (Log. 191 — Log. 8) = — (2,2810334 — 0,9030900), so erhält man den gegebenen Logarithmen — 1,3779134 wieder.

Es hat aber manches Unbequeme mit negativen Logarithmen zu rechnen, und man bedient sich daher statt ihrer durchgehends solcher Logarithmen, welche eine positive Mantisse und eine negative Charakteristik haben. Um nun dergleichen positive Logarithmen mit negativen Charakteristiken, welche zu ächten Brüchen gehören, aufzufinden, braucht man nur die Mantisse der Logarithmen des Nenners, wenn sie auch die größere ist, vom Logarithmen des Zählers abzu-

Digitized by Google

ziehen, zu dieser Absicht aber vorher die Charakteristik des Zählers um so viele Einheiten zu vergrößern, daß die Subtraktion geschehen kann, so bildet alsdann beim Reste die Zahl, um welche die Charakteristik des Zählers vergrößert wurde, die der Mantisse durch das Minuszeichen noch anzuhängende negative Charakteristik. So z. B. steht für Log. $^{7}/_{285}$ die Rechnung:

Es ist Log. 7 = 0,8150980 = 2,8450980 — 2
davon „ 295 = 2,4548449

giebt Log. $^{7}/_{235}$ = 0,3902531 — 2 ꝛc.

Die zu einem solchen Logarithmen mit negativer Charakteristik gehögehörige Zahl findet man nach § 9. s. d.

§ 11. Gebrauch der Logarithmen mit negativer Charakteristik.

Hat man einen oder mehrere Logarithmen mit negativen Charakteristiken zu anderen Logarithmen zu addiren, so wird nach geschehener Addition die Summe der positiven und die der negativen Charakteristiken, und zwar die kleinere von der größeren abgezogen, und der Rest, je nachdem die Summe der positiven oder die der negativen Charakteristiken die größere war, im ersteren Falle vor die Mantisse gesetzt, im anderen aber dieselbe mit dem Zeichen (—) angehängt.

Z. B. Welchen Werth hat $x = 0,0847 \times 837,62^2 \times 0,008765$?

Auflösung. Es ist Log. $837,62^2 = 2,9230470 \times 2 = 5,8460940$
Hierzu Log. 0,0847 = 0,9278834—2
und Log. 0,008765 = 0,9427519—3

addirt, so giebt Log. x = 7,7167293—5

Werden hier die beiden Charakteristiken von einander subtrahirt, so bleibt von der positiven ein Rest 7—5 = 2, und es ist daher der Logarithme des Productes = 2,7167293, und weil zu diesem die Zahl 520,87 gehört, so ist auch x = 520,87.

Welchen Werth hat P = 87,639 × 0,0004783?

Hier ist, weil Log. 0,0004783 = 0,6797004—4
und Log. 87,639 = 1,9426974

addirt, giebt Log. P. = 2,6223978—4 = 0,6223978—2.

Da nun zu diesem Logarithmen die Zahl 41918 gefunden wird, so ist wegen der negativen Charakteristik = — 2, das gesuchte Produkt P = 0,041918.

2) Das Rechnen mit Logarithmen welche negative Charakteristiken haben, geschieht ganz nach den allgemeinen Regeln der Buchstabenberechnung, so daß man, wenn negative und positive Charakteristiken vorkommen, welche addirt oder von einander subtrahirt werden

Digitized by Google

sollen, die Regeln für das Rechnen mit entgegengesetzten Größen anwendet. Das Rechnen selbst läßt sich übrigens noch dadurch vereinfachen, daß ein Logarithme nicht geändert wird, wenn man die positive und negative Charakteristik desselben um gleichviele Einheiten vermehrt oder vermindert. So z. B. ist $3,7834569-2=4+3,7834569-(2+4)=7,7834569-6$, und $(3-1),7834569-(2-1)=2,7834569-1$ ꝛc.

3) Wenn in einem gebrochenen Ausdrucke zwar die Charakteristik des Logarithmen des Zählers sowohl, als auch die des Nenners positiv ist, die des Zählers aber die kleinere ist, so verfährt man ganz so wie zu Ende des § 13 ist gelehrt worden.

4) Hat sowohl der Logarithme des Zählers, als auch der des Nenners eine negative Charakteristik, so ziehe man zuerst nach § 13 die Mantissen von einander ab, und hierauf, indem man die negative Charakteristik des Nenners (also des Subtrahenden) positiv nimmt, die beiden negativen Charakteristiken. Ist nun die negative Charakteristik des Subtrahenden die größere, so wird der Rest beider als positive Charakteristik vor die Mantisse gesetzt; ist aber die negative Charakteristik des Minuenden die größere, so bleibt der Rest als negative Charakteristik der Mantisse rechts angehängt.

Z. B. Wie viel beträgt $x=\frac{0,013}{0,000813}$?

Es ist Log. $0,013=0,1139434-2=1,1139434-3=$ Log. Z
ab Log. $0,000813=0,9100905+4=$ Log. N

also Log. $x=$ Log. $\frac{0,013}{0,000813}=0,2038529+1=1,2038529$,

und da zu diesem Logarithmen die Zahl 15,990 gehört, so ist auch $x=15,99$.

5) Soll mittelst der Logarithmen ein ächter Decimalbruch in ganzer oder gebrochener Form, oder auch ein ächter Bruch zu irgend einer Potenz erhoben werden, so muß man mit dem Exponenten nicht allein den entsprechenden Logarithmen, sondern auch dessen negative Charakteristik multipliciren. Z. B.: Welchen Werth hat 1) $x=0,089674^3$?

Antwort. 3. Log. $0,089674=(0,9526665-2)\,3=2,8579995-6=0,8579995-4=0,00072111$.

Welchen Werth hat 2) $(\frac{7}{9})^5$ und 3) $\frac{0,008374^4}{0,000593^3}$?

Auflösung ad 2) Es ist Log $7=1,8450980-1$
davon ab „ $9=0,9542425$
also Log. $(\frac{7}{9})^5=(0,8908555-1)\,5=4,4542775-5=0,4542775-1=0,28463$.

Digitized by Google

Auflöſ. ad 3) Log $0{,}008374^4 = (0{,}9229330-3)\,4 = 0{,}6917320 - 9$
davon ab „ $0{,}000593^3 = (0{,}7730547-4)\,3 = 0{,}3191641 + 10$

folglich Log. $\frac{Z^4}{N^3} = 0{,}3725679 + 1$

$= 1{,}3725679 = 23{,}581.$

6) Soll mittelſt der Logarithmen aus einem Zahlenausdrucke irgend eine Wurzel gezogen werden, und man findet, daß der Logarithme dieſes Ausdrucks eine negative Charakteriſtik enthält, ſo muß nicht allein dieſer Logarithme, ſondern auch deſſen negative Charakteriſtik durch den Wurzel-Exponenten dividirt werden. Iſt nun die negative Charakteriſtik nicht ohne Reſt durch den Wurzel-Exponenten theilbar, oder iſt der Wurzel-Exponent größer, als die negative Charakteriſtik Einheiten hat, ſo wird dieſelbe noch zuvor um ſo viel Einheiten vermehrt, daß die Diviſion ohne Reſt geſchehen kann, wobei jedoch, wie ſich dies von ſelbſt verſteht, die poſitive Charakteriſtik vor dem Komma um eben ſo viele Einheiten, als die negative Charakteriſtik, vermehrt werden muß. Z. B.:

Welchen Werth hat $x = \sqrt[5]{0{,}0005247^2}$?

Antwort. $x = 2.\ \text{Log.}\ \frac{0{,}0005247}{5} = \frac{(0{,}7199111-4)\,2}{5} =$

$\frac{1{,}4398222-8}{5} = \frac{3{,}4398222-10}{5} = 0{,}6879644-2 = 0{,}048749.$

§ 15. Von der Summe und Differenz der Zahlen durch Logarithmen.

Addition und Subtraktion der Größen kann mittelſt der Logarithmen nicht vorgenommen werden, weil die Addition der Logarithmen als die einfachſte Operation ſchon Multiplikation der Größen ſelbſt iſt. Kommen daher im Verlauf einer Rechnung Zahlenausdrücke von der Form $P + Q$ vor, ſo muß man jeden der Ausdrücke P und Q für ſich berechnen, und hierauf ihre Summe oder Differenz nehmen. Es ſei z. B. zu berechnen der Ausdruck:

$$x = \frac{85{,}73^3 \times 9{,}078 + 0{,}5378\sqrt[3]{7{,}387^2}}{49{,}7865},$$

ſo muß man ſetzen: $x = \frac{85{,}73^3 \times 9{,}078}{49{,}7865} + \frac{0{,}5378\sqrt[3]{7{,}387^2}}{49{,}7865} =$

Log. $P + Q$.

Nun iſt Log. $P = (3.\ \text{Log.}\ 85{,}73 + \text{Log.}\ 9{,}078) - \text{Log.}\ 49{,}7865,$

und Log. $Q = \frac{(2.\ \text{Log.}\ 7{,}387}{3} + \text{Log.}\ 0{,}5378) - \text{Log.}\ 49{,}7365.$

Digitized by Google

Man muß also P und Q besonders berechnen, und die ihnen in den Tafeln entsprechenden Zahlen zuletzt addiren, so giebt deren Summe den Werth von x. Schwieriger noch wird die Rechnung bei einem Ausdrucke von der Form $x = \sqrt[m]{\left[\frac{P \pm Q}{R \pm S}\right]^n}$; denn hier muß man die Größen P, Q, R und S, jede besonders berechnen, und hierauf eine neue logarithmische Rechnung anfangen, um x zu finden, denn es ist nun Log. $x = \frac{n}{m}$ [Log. $(P \pm Q)$ — Log. $(R \pm S)$].

Z. B.: Welchen Werth hat $x = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{(37{,}856^2 + 9{,}7684^3)^2}}{\frac{\sqrt[4]{578{,}3^3}}{29{,}763} - \sqrt[5]{71{,}5}}\right)^2}$?

Auflösung. Der Gang der Rechnung, um mit Hilfe der Logarithmen den Werth von x zu finden, ist hier folgender:
Es ist 2. Log. 37,856=1,5781347×2=3,1562694=1433,1.,
hierzu 3. Log. 9,7684=0,9898234×3=2,9694702=932,12
giebt 2365,22.

Nun ist 2. Log. 2365,23 = 3,3738716 × 2 = 6,7477432,

folglich $\sqrt[3]{2365{,}22} = \frac{6{,}7477432}{3} = 2{,}2492477 = \text{Log. Z.}$

Ferner ist $\sqrt[4]{578{,}3^3} = \frac{3.\ \text{Log. } 578{,}3}{4} = \frac{2{,}7621532.\ 3}{4}$

$$= \frac{8{,}2864596}{4} = 2{,}0716149$$

hiervon subtrahirt den Log. 29,763 = 1,4736767
läßt 0,5979382 = 3,9622

hiervon Log. $\sqrt[5]{71{,}5} = \frac{1{,}8543060}{5} = 0{,}3708612 = 2{,}3489$
bleibt = 1,6133

Nun ist Log. Z = 2,2492477
hiervon ab Log. N = Log. 1,6133 = 0,2077151
folglich Log. Q = 2,0415326

Nun ist $\sqrt[3]{Q^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{Z}{N}\right)^2} = \frac{2{,}0415326.2}{3} = \frac{4{,}0830652}{3} = 1{,}3610217.$

Da nun zu diesem Logarithmen die Zahl 22,9627 gehört, so ist diese auch der Werth obigen Ausdrucks von x.

(Dieses Beispiel werde zur Uebung mehreremale gerechnet.)

§ 16. Eine Gleichung von der Form $A^x = B$ heißt eine logarithmische, weil sie, besonders wenn x größer als 4 ist, nur durch

Digitized by Google

Logarithmen bequem auflösbar ist. Man kann nämlich (nach § 4 Nr. 3) $A^x = B$ verwandlen in x. Log. A = Log. B,

$$\text{also } x = \frac{\text{Log. B}}{\text{Log. A}}.$$

Hierauf beruht die Auflösung aller logarithmischen Gleichungen, wenn solche anders auf direktem Wege auflösbar sind. Man habe z. B. die verwickeltere Gleichung:

$A^{mx} = B$,

so hat man x. Log. A^m = Log. B,

und sonach $x = \frac{\text{Log. B}}{\text{Log. } A^m} = \frac{\text{Log. B}}{m \text{ Log. A}}$.

Oder man habe $A^{mx} + B^{nx} = E$,

so erhält man x (Log. A^m + Log. B^n) = Log. E,

also $x = \frac{\text{Log. E}}{(\text{Log. } A^m + B^n)} = \frac{\text{Log. E}}{m. \text{ Log. A} + n. \text{ Log. B}}$.

Wäre ferner $A^{mx} + a = B^{nx} + b = E$,

so ist (mx + a) Log. A + nx + b) Log. B = Log. E

oder mx. Log. A + a Log. A + nx. Log. B + b. Log. B = Log. E,

also auch x. (m. Log. A + n. Log. B) = Log. E − a. Log. A − b. Log. B.

folglich $x = \frac{\text{Log. E} - a. \text{ Log. A} - b. \text{ Log. B}}{m. \text{ Log. A} + n. \text{ Log. B}}$.

Hätte man endlich die Gleichung:

$$A^{m-x} = aB^{\frac{ax}{r}},$$

so erhält man dafür

$(m - x)$ Log. A = Log. $a + \frac{n}{r}$ x. Log. B

oder m. Log. A − x. Log. A = Log. $a + \frac{n}{r}$ x. Log. B

also m. Log. A − Log. $a = \frac{n}{r}$x Log. B + x. Log. A,

folgl. $\frac{m. \text{ Log. A} - \text{Log. a}}{\frac{n}{r} \text{ Log. B} + \text{Log. A}} = x.$

An diesen Beispielen wird man gelernt haben, jede logarithmische Gleichung mit Hilfe der Logarithmen aufzulösen.

Digitized by Google

II. Gebrauch der trigonometrischen Logarithmen.

§ 1. Einleitung.

Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

Bei den eigentlichen trigonometrischen Rechnungen bedient man sich fast immer der Logarithmen, weshalb es höchst nöthig ist, die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen zu kennen, und findet sogar in den kleineren trigonometrischen Tafeln (z. B. denen von Adrian Vlacq) nur die Logarithmen der Funktionen, ohne daß die Funktionen selbst angegeben sind.

Diese Logarithmen konnte man leicht mittelst der gemeinen logarithmischen Tafeln berechnen, nachdem einmal die Sinus und Cosinus selbst ausgemittelt waren, denn ist z. B.

$$\text{Sin. } \alpha = \text{r(adius). m}$$

so erhält man $\text{Log. sin. } \alpha = \text{Log. r} + \text{Log. m}$,
wobei man durchgehends $\text{Log. r} = 10$ angenommen hat.

Sind so die Logarithmen der Sinus und Cosinus gefunden, so findet man

$\text{Log. tang. } \alpha = \text{Log. r} + \text{Log. sin. } \alpha - \text{Log. cos. } \alpha$;
$\text{Log. cotang. } \alpha = \text{Log. r} + \text{Log. cosin. } \alpha - \text{Log. sin. } \alpha$;
$\text{Log. secans } \alpha = 2\ \text{Log. r} - \text{Log. cos. } \alpha$, und
$\text{Log. cosecans } \alpha = 2\ \text{Log. r} - \text{Log. sin. } \alpha$

Ferner ist auch, weil

$$\text{sin. vers. } \alpha = \frac{2\ \text{sin.}^2 \times \frac{1}{2}\alpha}{\text{r}}$$

$$\text{Log. sin. vers. } \alpha = 2\ \text{Log. sin.} \times \frac{\alpha}{2} + \text{Log. } 2 - \text{Log. r.}$$

Digitized by Google

Da übrigens bei großen Zahlen, die nur wenig von einander verschieden sind, die Differenzen dieser Zahlen sich wie die Differenzen ihrer Logarithmen verhalten, so daß, wenn

$$\text{Log. } a = l$$

und $\text{Log. } (a + b) = l + d$,

und es ist b im Verhältniß zu a sehr klein,

auch $\text{Log. } (a + \frac{m}{n} b) = l + \frac{m}{n} d$

sein muß, wie schon aus der Theorie der Logarithmen bekannt, so folgt, daß der Satz für die Differenzen der einzelnen Secunden auch bei den Logarithmen der Funktionen in Anwendung gebracht werden kann. So z. B. ist für $r = 10$

$$\text{Log. sin. } 28° 17' = 9{,}6756245$$

$$\text{und Log. sin. } 28° 16' = 9{,}6753896$$

$$\text{also die Differenz für } 1' = 0{,}0002349,$$

und deshalb ist

$$\text{Log. sin. } 28° 16' 25'' = 9{,}6753896 + \frac{25}{60} \times 0{,}0002349$$

$$= 9{,}6753896 + 0{,}000097875,$$

oder, weil nicht mehr als sieben Decimalen genommen werden, so findet man, wie wir weiter unten sehen werden, daß

$$\text{Log. sin. } 28° 16' 25'' = 9{,}6753896 + 0{,}0000979$$

$$= 9{,}6754875$$

sein muß.

Einrichtung und Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln.

§ 2. Wirkliche Form der gebräuchlichen Tafeln.

Die trigonometrischen Tafeln unterscheiden sich in logarithmisch-trigonometrische, und in trigonometrische überhaupt. Die ersteren enthalten die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, und die letzteren enthalten die trigonometrischen Funktionen selbst.

Die in Deutschland gebräuchlichsten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln sind ebenfalls die des Freiherrn v. Vega, und zwar insbesondere „das logarithmisch-trigonometrische Handbuch" ꝛc., ein Band in 4to. Es enthält dieses Werk außer den gemeinen Logarithmen der Zahlen, als II. Abtheilung (oder Tab. II.) von Seite 188 bis Seite 560 blos die Logarithmen der Sinus, Cosinus, der Tangenten

Digitized by Google

und Cotangenten von 0° (Grad) bis 45°, und zwar von zehntel Secunden bis auf 1′ (Minute); ferner von 10 zu 10 Secunden bis 6 Grad, und von 6° bis 45° enthält es die Logarithmen der Funktionen von Minute (′) zu Minute. Die Einrichtung ist dabei so, daß die Ueberschrift die Grade (bez. durch °), und die vorderste Spalte zur Linken die Minuten (bez. durch ′) angiebt.

Die 2te Spalte enthält die gemeinen Logarithmen der Sinus (für Logarithmus r (radius) = 10000000)', die folgende mit Diff. 1″ (Secunde) überschriebenen Spalte die Differenz der Logarithmen der Sinus (bez. durch sin.) zweier Bogen, die nur um 1 von einander abweichen (nämlich die Zahlen stehen hier etwas heruntergerückt, und geben vom 6ten Grade (6°) an den 60sten Theil der Differenz der beiden Zahlen in der zur Linken stehenden Sinus-Spalte, zwischen welchen sie stehen).

Nun folgen in der 3. und 4. Spalte die Logarithmen der Cosinus (bezeichn. durch cos) und ihrer Differenzen für je 1″ (Secunde); ferner die Logarithmen der Tangenten (bez. durch tang.) und Cotangenten (bez. durch cot.) in der 5. und 7. Spalte. Die 6. mit CD. 1″ überschriebene Spalte enthält die gemeinschaftliche Differenz der links und rechts stehenden Logarithmen der Tangenten und Cotangenten für je 1 Secunde.

Endlich ist noch eine Spalte zur Rechten befindlich, in welcher die Minuten, von unten herauf gezählt, angegeben sind.

Mittelst dieser Tafeln findet man die Logarithmen der Funktionen von 0° bis 45° bis auf 1 Minute genau, unmittelbar, ohne daß dabei die Differenzen gebraucht würden.

Das größere Werk von Vega unter dem Titel „Logarithmisch-trigonometrische Tafeln" ꝛc, 2 Bde. in 4to, enthält am Ende des 1. Bandes noch besondere Tafeln der Funktionen selbst für r(adius) = 1, deren Einrichtung aber ganz dieselbe ist, nur daß Tangente und Cotangente jede derselben ihre eigene Differenzen hat.

Zusatz. In den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln haben Tangente und Cotangente deshalb eine gemeinschaftliche Differenz, weil tang. $\alpha \times$ cot. $\alpha = r^2$

und daher Log. tang. α + Log. cot. $\alpha = 2$ Log. r;

es ist also die Summe der Logarithmen der Tangente und Cotangente eines Bogens eine unveränderliche Größe; um soviel daher Log. tang. $(\alpha + \beta)$ größer als Log. tang. α ist, um eben so

Digitized by Google

viel muß auch Log. cot. $(\alpha + \beta)$ kleiner als Log. cot. α sein, und umgekehrt.

Für die Folge soll blos bezeichnet werden:

Logarithmus Sinus durch Log. sin.,
Logarithmus Cosinus durch Log. cos.,
Logarithmus Tangens durch Log. tang. und
Logarithmus Cotangens durch Log. cot.

§ 3. Die Funktionen von 45° bis 90°.

Will man nun mit Hilfe der Vega'schen Tafeln die Logarithmen der Funktionen zwischen 45° und 90° nachschlagen, so nimmt man die unten angemerkten Grade und die Minuten rechts von unten herauf. Uebrigens müssen dabei auch die Ueberschriften der einzelnen Spalten, statt der Unterschriften benutzt werden. Der Grund dieser Einrichtung besteht in Folgendem:

Die Spalte, bei welcher Log. sin. die Ueberschrift ist, hat Log. cosin. zur Unterschrift, und so sind durchweg Ueber- und Unterschriften stets gegenseitig Cofunktionen.

Die Minuten links und rechts in ein und derselben Horizontallinie geben überall, zusammenaddirt, 60′ (Minuten) = 1° (Grad), und die Grade als Ueber- und Unterschriften geben zusammen 89°, folglich mit den Minuten in Summa 89° + 1° = 90°. Nimmt man daher z. B. von oben herunter 34° 12′, so erhält man einen Logarithmen, der von unten herauf zu 89° 60′ — 34° 12′ = 55° 48′ gehört, und weil

$$34^\circ\ 12' + 55^\circ\ 48' = 90^\circ$$

so ist Log. sin. 34° 12′ = Log. cos. 55° 48′
und umgekehrt ist Log. cos. 34° 12′ = Log. sin. 55° 48′

Dasselbe gilt natürlich auch für Tangenten und Cotangenten. Bezeichnet man nun eine Funktion durch f, und die Cofunktion durch cof., so ist also allgemein, wenn man von oben herab findet:

Log. f $(a^\circ b')$ = m

von unten herauf

m = Log. cof. $(90^\circ - a^\circ b')$,

oder m = Log. cof. $[(89 - a)^\circ + (60 - b')]$,

wie es sein muß, weil immer

f $a^\circ b'$ = cof. $(90^\circ - a^\circ b')$.

Digitized by Google

Zusatz. Bei den Tafeln der Funktionen selbst, wie sie am Ende des 1. Bandes des größeren Vega'schen Werkes enthalten sind, ist die Einrichtung und der Gebrauch aus demselben Grunde auch ganz derselbe.

§ 4. Gebrauch der Differenzen für die Secunden.

Die in den Differenzspalten d enthaltenen Zahlen stehen, wie schon § 2 bemerkt ist, mit den Zahlen der anderen Spalten nicht in ein und derselben geraden Linie, sondern sie sind ein wenig herabgesetzt, so, daß zwischen jeden zwei Logarithmen immer eine Differenz steht, und es sind diese Differenzen nichts anderes als der 60te Theil der Differenz der beiden zur Linken befindlichen Logarithmen, zwischen welchen sie stehen. So findet man

z. B. Log. sin. $27°31' = 9{,}6646482$
und Log. sin. $27°30' = 9{,}6644056$, also die

Differenz d beider Logar. = 2426

wovon der 60. Theil $= \frac{2426}{60} = 40{,}4(3)$,

und dieser Quotient ist die zwischen jenen Zahlen befindliche Differenz. Weil nämlich die Differenz von 1′ (Minute) hier = 2426 ist, so muß sie natürlich von 1″ (Secunde) $= \frac{2426}{60} = 40{,}43$ sein.

Soll daher der Logarithme der Funktion eines Bogens bis auf Secunden genau angegeben werden, so schlägt man ihn erst für die Grade und Minuten nach, multiplicirt hierauf die rechts zwischen dem gefundenen Logarithmen und dem zunächst folgenden stehende Differenz mit der gegebenen Secundenzahl, und addirt dieses Produkt oder subtrahirt es, je nachdem die Funktion im 1. Fall mit dem Bogen wächst, oder je nachdem sie im 2. Falle mit dem Bogen abnimmt, wenn jener zunimmt. Man muß also dieses Produkt addiren, wenn der Sinus oder die Tangente gesucht wird, subtrahiren aber, wenn der Cosinus oder die Cotangente angegeben werden soll.

Beispiele. 1) Welches ist der Log. sin. von 41° 18′ 12″?
Auflösung. Es ist Log. sin. 41° 18′ 9,8195450
und Log. sin. 41° 17′ 9,819401.2

so ist die Differenz beider Logarithmen = 1438

also die Differenz für $1'' = \frac{1438}{60} = +\ 23{,}96$,

Digitized by Google

so ist sie für 12″ = 23,96 × 12 = 287,52 oder = + 288
hierzu den Log. sin. von 41° 18′ = 9,8195450
giebt für den Log. sin. von 41° 18′ 12″ = 9,8195738.

2) Welches ist der Log. Tang. von 73° 28′ und 20″?
Auflösung. Es ist Log. Tang. 73° 28′ = 10 *),5274682 (pag. 389)
und die Differ. für 1 Secunde $= \frac{4682-0053}{60}$
= 77,15, also für 20″ = 77,15 × 20 = + 1543
folgl. Log. tang. 73° 28′ 20″ = 10,5276225

3) Welches ist der Log. cosin. von 63° 27′ 40″?
Auflösung. Es ist Log. cos. 63° 27′ = 9,6502868
und Log. cos. 63° 28′ = 9,6500338, also ist die
herrsch. Differ. 2530, daher $\frac{2530}{60}$ = 42,16
für 1″, für 40″ also 42,16 × 40 = 1686,40 = − 1686
folgl. Log. cos. 63° 27′ 40″ = 9,6501182.

4) Welches ist der Log. cot. von 71° 41′ 18″?

Auflösung. Es ist (pag. 399) Log. cot. von 71° 41′ = 9,5198819
und Log. cot. 71° 42′ = 9,5194583, also
Differ. = 4236, daher $-\frac{4236}{60}$ = 70,59,
für 1 Secunde, also für 18″ = − 70,6.18 = − 1271(0)
mithin Log. cot. 70° 41′ 18″ = 9,5197548.

Zusatz. Die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln enthalten gewöhnlich weder für die Sekanten, noch für den Sinus versus besondere Spalten. Sollen daher die Logarithmen dieser Funktionen angegeben werden, so muß dies nach den Formeln des § 1 (s. d.) geschehen. Es ist nämlich, wenn man den Logarithmen der Secante durch Log. sec. und den Logarithmen des Sinus versus durch Log. sin. vers., oder blos durch Log. sinv. bezeichnet:

*) Ueberall, wo in Vega's Logarithmen von Dr. C. Bremiker verbesserten und vervollständigten Stereotyp-Ausgabe der Logarithmen eine Funktion mit 0 Ganzen (also 0,) beginnt, wie in den 3ten Columnen mit der Ueberschrift Cotang. und der Unterschrift Tang. ersichtlich, muß für 0 Ganze, stets 10 Ganze genommen worden.

Digitized by Google

$$\text{Log. sec. } \alpha = 2 \text{ Log. r} - \text{Log. cos. } \alpha$$
$$= 20 - \text{Log. cos. } \alpha.$$

Soll daher z. B. der Log. sec. von 24° 17′ 8″ gefunden werden, so sucht man Log. cos. 24° 17′ 8″ und subtrahirt denselben von 20. Es ist nämlich Log. cos. 24° 17′ = 9,9597676 (pag. 435)

und die Differenz für 1″ $= \frac{8246-7676}{60}$

$= 9{,}5$, also für 8″ = 76,0, daher — 76

bleibt 9,9597600

und dieser Rest subtrahirt von 20, ...

giebt den Log. sec. von 24° 17′ 8″ = 10,0402400.

Ferner nach § 1. ist

$$\text{Sin. vers. } \alpha = \frac{2 \text{ sin.}^2 \frac{1}{2} \alpha}{\text{r}}$$

also $\text{Log. sinv. } \alpha = (2 \text{ Log. sin. } \frac{\alpha}{2} + \text{Log. } 2) - \text{r } (= 10).$

Soll daher z. B. der Log. sin. vers. von 63° 27′ 16″ gesucht werden, so setzt man Log. sin. $\frac{63° \ 27' \ 16''}{2} = 31° \ 43' \ 38''$;

Da nun Log. sin. 31° 43′ = 9,7207538,

und die Differ. für 1″ $= \frac{7538-5493}{60}$

$= 34{,}08$, also für 38″ = 34,08 × 16 = + 1295,04

Daher Log. sin. $\frac{\alpha}{2}$ = 9,7268833

folgl. Log. sin. $^2 \times \frac{1}{2}$ = 9,7208833 × 2

= 19,4417666

hierzu nach Log. 2 = 0,3010300

daher 2 Log. sin. $^2 \frac{\alpha}{2}$ = 19,7427966

hiervon ab r = 10, ... , bleibt für

Log. sinv. 63° 27′ 16″ = 9,7427966.

Anmerkung. In mehreren trigonometrischen Tafeln sind die Funktionen und die Logarithmen der Funktionen nicht getrennt angegeben, sondern sie stehen neben einander, was aber beim Gebrauche solcher Tafeln keinen Unterschied macht. Uebrigens ist die Einrichtung

Digitized by Google

— besonders der älteren Tafeln — ganz anders. Es enthalten diese die Sinus und Tangenten von 0° bis 90°, wodurch natürlich die Spalten für Cosinus und Cotangenten ganz wegfallen. Diese Einrichtung kömmt aber der Vega'schen Einrichtung nahe, daß (wie dies z. B. bei den Vlacq'schen Tafeln der Fall ist) die linken Seiten der Blätter nach und nach die Funktionen von 0° bis 45′ enthalten, und die rechten Seiten die Funktionen von 90° bis 45° rückwärts. So stehen auf der linken und rechten Seite stets zwei Funktionen einander gegenüber, welche sich gegenseitig zu 90° ergänzen. Es steht z. B. auf der linken Seite

Log. sin. 24° 36′ = 9,6193864

und gegenüber auf der rechten Seite

Log. cosin. 65° 24′ = 9,9586767.

Da nun sin. 24° 36′ = cos. 65° 24′ und umgekehrt cos. 65° 24′ = sin. 24° 36′ so sieht man leicht ein, daß in dergl. Tafeln die Cofunktionen dadurch gefunden werden, daß man zu den Ueberschriften links die Zahlen rechts aufsucht und umgekehrt.

§ 5. Die Funktionen im II. Quadranten (bis 180°).

Mit Ausnahme des Sinus versus ist immer der Größe nach:

$$fa = f(180—a).$$

nämlich zwei Bogen, welche sich gegenseitig zu 180° ergänzen, haben der Größe nach einerlei oder dieselbe Funktion. Jede Funktion eines Bogens von mehr als 90° wird daher in den trigonometrischen Tafeln gefunden, wenn man diesen Bogen von 180° subtrahirt und dann die Funktion des Restes in den Tafeln nachschlägt. Die Differenz für die Secunden wird hierbei eben so addirt, oder nach Umständen subtrahirt, wie vorhin bei den Bogen im I. Quadranten; denn wenn gleich z. B. der Sinus im II. Quadranten abnimmt, während der Bogen wächst, so kann dies doch nicht bei dem Nachschlagen in den Tafeln berücksichtigt werden, weil man hier die Funktion eines solchen Bogens nicht unmittelbar findet, sondern statt dessen die Funktion eines anderen Bogens nachschlagen muß, welcher jenen zu 180° ergänzt, der folgl. kleiner als 90° ist, und bei welchem also, wenn der Sinus gesucht wird, die Differenz addirt werden muß. Eben so muß die Differenz bei dem Cosinus subtrahirt werden, wenn gleich der Cosinus im II. Quadranten mit dem Bogen wächst.

So z. B. ist, wenn $>$ das Größere, und $<$ das Kleinere bedeutet,

Digitized by Google

cos. 113° 25′ 20″ < cos. 113° 26″
und da cos. 113° 25′ 20″ = cos. (180° — 113° 25′ 20″)
= cos. 66° 34′ 40″
und cos. 113° 26′ = cos. (180° — 113° 26′)
= cos. 66° 34′

---

so ist auch cos. 113° 25′ 20″ < cos. 66° 34′

Oder es wird der Cosin. von 113° 25′ 20″ gefunden, wenn man von cos. 66° 34′ die in dieser Gegend herrschende Differenz für 1 Secunde 40mal genommen, subtrahirt.

Im II. Quadranten sind bekanntlich mehrere Funktionen negativ, worauf stets Rücksicht genommen werden muß, und bedient man sich der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, so muß man — weil in unserem logarithmischen Systeme den negativen Größen bekanntlich keine reelle Logarithmen zukommen — eine solche Funktion zuvor positiv machen, welches dadurch geschieht, daß man ihr das Minus-Zeichen (—) vorsetzt. So z. B. ist mit Rücksicht auf das Zeichen

sin. α = sin. (180° — α).

cos. α = — cos. (180° — α)

und tang. α = — tang. (180° — α) ꝛc.

daher auch Log. tang. α = Log. (— tang. (180° — α) u. s. f.

Beispiele. 1) Welches ist der Log. sin. von 124° 34′ 16″?

Auflösung. Es ist Log. sin. 124° 34′ 16″ =
Log. sin. (180° — 124° 34′ 16″
= Log. sin. 55° 25′ 44.″

Nun ist Log. sin. 55° 25′ = 9,9156227 (pag. 497)
und für 1 Secunde ist die Differenz
$\frac{5589-4718}{60}$ = 14,51, also für 44″ = 14,51 × 44 = 638,44

---

folgl. ist Log. sin. 55° 25′ 44″ = 9,9156227
= Log. sin. von 124° 34′ u. 16″.

2) Welches ist der Log. cos. von 163° 25′ 40″?

Digitized by Google

Auflösung. Es ist Log. (— cos. 163° 25′ 40″ = Log. cos (180° — 163° 25′ 40″)
= Log. cos. 16° 34′ 20″.
Nun ist Log. cos. 16° 34′ = 9,95815870 (pag. 388)
und für 1 Secunde ist die Differenz
$= -\frac{5870-6245}{60} = -6{,}25$
also für 20″ $= -6{,}25 \times 20 = -125$

folgl. Log. cos. 16° 34′ 20″ = 9,9315745
= Log. — cos. 163° 25′ 40″.

3) Welches ist Log. tang. von 133° 23′ 35″?

Auflösung. Es ist Log. (— tang. 133° 23′ 35″) =
Log. tang. (180° — 133° 23′ 35″) =
Log. tang. 46° 36′ 25″.
Nun ist Log. tang. 4 36′ = 10,0242682 (pag. 550) die Differ. für 1″ ist hier
$\frac{2682-0151}{60} = 42{,}18$, also für 25″ $= +42{,}18.25 = +1055$

folgl. Log. tang. 46° 36′ 25″ = 10,0243737
= Log. (— tang. 133° 25′ 35″).

4) Welches ist Log. cosec. von 132° 48′ 48″?

Auflösung. Es ist Log. cosec. 132° 48′ 48″ = Log. cosec (180° — 132° 48′ 48″)
= Log. cosec. 47° 11′ 12″, und Log. cosec. $\alpha = 20 -$ Log. sin. α
Nun ist Log. sin. 47° 11′ = 9,8654192 (pag. 546)
und die Differ. für 1 Secunde $= \frac{4192-3021}{60}$
$= 19{,}51$, also für 12″ $= 19{,}51 \times 12 = +234{,}12$

folgl. Log. sin. 47° 11′ 12″ = 9,8654426,
mithin Log. cosec. 47° 11′ 12″ = 20 − 9,8654426
= 10,1345574 = Cosec. 132° 48′ 48″

§ 6. Die Funktionen im III. u. IV. Quadranten.

Nicht blos für die Bogen im II. Quadranten, sondern für alle Bogen überhaupt, welche größer als 90° sind, muß man zuvor einen Bogen im I. Quadranten ausmitteln, welchem der Größe nach die-

Digitized by Google

selbe Funktion zukömmt, bevor man den Werth der Funktionen in den Tafeln nachschlagen kann. Nun ist ganz allgemein:

$$f(\alpha - 180^\circ) = \pm f\alpha$$

und ebenso $f(\alpha - 360^\circ) = \pm f\alpha$.

Man findet daher den Werth der Funktion eines jeden Bogens im III. Quadranten, wenn man von einem solchen Bogen 180° abzieht, und sodann die Funktion des Restes in den Tafeln nachschlägt.

Um aber für jeden Bogen im IV. Quadranten die demselben entsprechende Funktion zu finden, muß man einen solchen Bogen zuvor von 360° subtrahiren, und dann die Funktion des Restes in den Tafeln nachschlagen.

Ob aber die gefundene Funktion positiv oder negativ genommen werden muß, darüber giebt nachstehende Tabelle den gehörigen Aufschluß. Was übrigens die Differenz für die Secunden anbelangt, so wird eine solche stets addirt oder subtrahirt, je nachdem es die gegebene Funktion vermöge ihres Zeichens im I. Quadranten mit sich bringt.

Digitized by Google

Tabelle

für die Abhängigkeit der trigonometrischen Funktionen von den Bogen.

Eigenschaften der Funktionen in den vier Quadranten.

	0°	0°—90° I. Quadr.	90°	90°—180° II. Quadr.	180°	180°—270° III. Quadr.	270°	270°—360° IV. Quadr.
Sinus	0	$> +$	$+ r$	$< +$	0	$> -$	$- r$	$< -$
Cosinus	$+ r$	$< +$	0	$> -$	$- r$	$< -$	0	$> +$
Tangente	0	$> +$	∞	$< +$	0	$> +$	∞	$< -$
Cotangente	∞	$< +$	0	$> -$	∞	$< +$	0	$> -$
Secante	r	$> +$	∞	$< -$	$- r$	$> -$	∞	$< +$
Cosecante	∞	$< +$	$+ r$	$> +$	∞	$< -$	$- r$	$> -$
Sinus versus	0	$> +$	$+ r$	$> +$	$+ 2r$	$< +$	$+ r$	$< +$
Cosinus versus	r	$< +$	0	$< +$	$+ r$	$> +$	$+ 2r$	$< +$

In dieser Tabelle bedeutet +, daß die gegebene Funktion positiv, (—) aber, daß sie negativ; > das Wachsen der Funktion mit dem Bogen < das Abnehmen der Funktion, während der Bogen selbst größer wird; r daß die Funktion dem Radius, und 2r, daß sie dem Durchmesser gleich ist, und ∞ (heißt Lemniscate), daß die Funktion unendlich groß ist

Digitized by Google

Beispiele. 1) Welches ist der Log. sin. von 203° 28′ 16″?

Auflösung. Da 203° > 180°, so ist der Sinus im III. Quadranten, und daher nach voriger Tabelle negativ.

Es ist daher, weil 203° 28′ 16″ — 180° = 23° 28′ 16″

also Log. (—sin. 203° 28′ 16″) = Log. sin. 23° 28′ 16″ = 9,6001957.

2) Welches ist der Log. Cosinus von 295° 12′ 28″?

Auflösung. Da 295° > 270°, so liegt der Cosinus im IV. Quadranten, und ist daher nach vorheriger Tabelle positiv.

Es ist also, weil 360° — 295° 12′ 28″ = 64° 47′ 32″

auch Log. cosin. 295° 12′ 28″ = Log. cos. 64° 47′ 82″ = 9,6293099.

3) Welches ist Log. tang. 307° 12′ 25″?

Auflösung. Da 307° > 270°, so ist diese Tangente im IV. Quadranten, und ist demnach negativ.

Weil nun 360° — 307° 12′ 25″ = 52° 47′ 35″,

so ist auch Log. (— tang. 307° 12′ 25″ = Log tang. 52° 47′ 35″
= 10,1194767.

4) Welches ist der Log. cotg. von 198° 27′ 52″?

Auflösung. Weil 198° > 180°, so liegt die Cotangente im III. Quadranten, und ist nach letzterer Tabelle positiv.

Weil nun 198° 27′ 52″ — 180° = 18° 27′ 52″,

so ist auch Log. cotg. 198° 27′ 52″ = Log. cotg. 18° 27′ 22″
= 10,4745866.

5) Was ist Log. sec. von 233° 23′ 18″?

Auflösung. Weil 233° 23′ 18″ > 180°, so befindet sich die Secante (sec.) im III. Quadranten, und ist nach voriger Tabelle negativ.

Da nun 233° 25′ 18″ — 180° = 53° 23′ 18″,

so ist auch Log. (— sec. 233° 23′ 18′, =
Log. sec. 53° 23′ 18″ = 20 — Log. cos. 53° 23′ 18″
= 20—9,9058596 = 10,0941404.

6) Was ist Log. cosec. von 325° 27′ 28″?

Auflösung. Weil 325° > 270°, so ist die Cosecante (cosec.) im 4. Quadranten, und ist in Folge voriger Tabelle negativ.

Da nun 360° — 325° 27′ 28″ = 34° 32′ 32″,

so ist Log. (— cosec. 325° 27′ 28″ = Log. cosec. 34° 32′ 32″
= 20 — Log. sin. 34° 32′ 32″ = 20 — 9,7535933
= 10,2464067.

Digitized by Google

§ 7. Allgemeine Regel.

Die allgemeine Regel, nach welcher jede Funktion, oder auch der Logarithme einer jeden Funktion für jede beliebige Fnnktion aufgefunden werden kann, ist folgende:

Man ziehe von dem gegebenen Bogen so oft es angeht, 180° ab, und ist der bleibende Rest größer als 90°, so subtrahire man ihn selbst noch von 180°, und schlage nun zu dem so erhaltenen Bogen die Funktion in den trigonometrischen Tafeln nach.

Um nun zu erfahren, ob die Funktion positiv oder negativ ist, so sieht man zu, wie oft man 180° subtrahirt hat, wo übrigens aber jene 180° dazu gezählt werden müssen, von welchen der Rest, wenn er mehr als 90° betrug, noch subtrahirt wurde. Hat man nun eine gerade Anzahl Mal 180° subtrahirt (z. B. 2, 4 mal), so gehört der gegebene Bogen zu der Formel: $2\,n\,\pi + \alpha$; hat man aber 1 =, 3 = oder 5 mal 180° subtrahirt, so gehört der gegebene Bogen zu der allgemeinen Form: $(2\,n + 1)\,\pi + \alpha$; hat man aber 1-, 3- oder 5mal 180° subtrahirt, so gehört der gegebene Bogen zu der allgemeinen Form: $(2\,n + 1)\,\pi \pm \alpha$, wobei der Theil $+\,\alpha$ stets gilt, wenn auch der erste Rest $< 90°$, ist derselbe aber $< 90°$, so gilt der Theil $-\,\alpha$. — Unter der entsprechenden Form sucht man nun die gehörige Funktion in der nachstehenden Tabelle auf, in welcher das Zeichen der Funktion angegeben ist.

Digitized by Google

Tabelle
der Werthe der verschiedenen Funktionen eines jeden Bogens.

	$2n\pi$	$2n\pi+\alpha$	$2n\pi+90^0$	$(2n+1)\pi-\alpha$	$(2n+1)\pi$	$(2n+1)\pi+\alpha$	$(2n+1)\pi+90^0$	$2n\pi-\alpha$
Sinus.	0	+ sin. α	+ r	+ sin. α	0	— sin. α	— r	— sin. α
Cosinus.	+ r	+ cos. α	0	— cosin. α	— r	— cosin. α	0	+ cos. α
Tangens.	0	+ tang. α	∞	— tang. α	0	+ tang. α	∞	— tang. α
Cotangens	∞	+ cotg. α	0	— cotg. α	∞	+ cotg. α	0	— colg. α
Secante	+ r	+ sec. α	∞	— sec. α	— r	— sec. α	∞	— secans. α
Cosecante	∞	+ cosecant. α	r	+ cosec. α	∞	— cosec. α	r	— cosec. α
Sinus versus.	0	sinvers. α	r	2 r — sinv. α	2 r	2 r — sin. vers. α	r	sin. versus α.
Cosinus versus.	r	cosin. vers. α.	0	cos. vers. α	r	2 r — cosin. vers. α	2 r	2r — cosin. vers α

In dieser Tabelle ist $\pi = 180^0$, $\alpha < 90^0$, und für n kann jede beliebige ganze Zahl, auch 0 gesetzt werden.

Digitized by Google

Beispiele. Welches ist der Sin. von 788° 35′ 12″?

Auflösung. Es ist $788° = 4 \times 180° (= 720°) + 68° 35' 12''$.

Dieser Bogen gehört also zu der Form $2n\pi + \alpha$, der Sinus desselben ist also nach vorstehender Tabelle positiv ($= +$ sin. α), folgl. ist sin. 788° 35′ 12″ $=$ + sin. 68° 35′ 12″,

also auch Log. sin. 788° 35′ 12″ = Log. sin. 68° 35′ 12″
= 9,9689361.

2) Was ist der Sinus von 695° 18′ 24″?

Auflösung. Es ist $\frac{695° 18' 24''}{180} = 3.180 + 155° 18' 24''$
$= 4.180° - 24° 41' 36''$

die entsprechende Form ist also $2n\pi - \alpha$ und folgl. ist der entsprechende Sinus nach vorstehender Tabelle negativ,
daher sin. 695° 18′ 24″ = — sin. 24° 41′ 36″

mithin Log. (— sin. 695° 18′ 24″) = Log. (— sin. 24° 41′ 36″,
= — 9,6209284.

3) Welches ist der Cosinus von 501° 17, 8″?

Auflösung. Es ist $\frac{501° 17' 8''}{180} = 2 \times 180° + 141° 17' 8''$
$= 3.180 - 38° 42' 52''$,

daher gehört dieser Bogen (weil 3 ungerade ist) laut vorstehender Tabelle zu der Form: $(2n + 1)\pi - \alpha$, und es ist folgl. dessen Cosin. negativ,
daher ist cosin. 501° 17′ 18″ = — cosin. 38° 42′ 52″

mithin Log. (— cos. 501° 17′ 8″) = Log. — (cos. 38° 42′ 52″
= — 9,8924212.

4) Welches ist der Cosin. von 306° 18′ 16″?

Auflösung. Es ist $\frac{306° 18' 16''}{180} = 1.180° + 126° 18' 16''$
$= 180° - 126° 18' 16''$
$= 2.180° - 53° 41' 44''$,

mithin ist, (weil 2 eine gerade Zahl) die entsprechende Form nach vorstehender Tabelle: $2n\pi - \alpha$, und also der Cosin. positiv,
daher cosin. 306° 18′ 16″ = cos 53° 41′ 44″,

und folgl. Log. cosin. 306° 18′ 16″ = Log. cos. 53° 41′ 44″
= 9,7726293.

5) Was ist tang. 596° 28′ 16″?

Auflösung. Es ist $\frac{596° 28' 16''}{180} = 3 \times 180° + 56° 28' 16'$,

und daher ist dieser Bogen nach vorstehender Tabelle, weil er zu

Digitized by Google

der Form: $(2n + 1)\pi + \alpha$ gehört, also seine Tangente, positiv, folgl. ist tang. 596° 28′ 16″ tang. 56° 28′ 16″,

mithin Log. tang. 596° 28′ 16″ = Log. tang. 56° 28′ 16″
= 10,1787403.

6) Welches ist Log. tang. von 845° 27′ 18″?

Auflösung. Es ist $\frac{845^\circ\ 27'\ 18''}{180} = 4 \times 180^\circ + 125^\circ\ 27'\ 18''$
$= 5.180^\circ - 54^\circ\ 32'\ 42''$

folgl. ist die entsprechende Form dieses Bogens $(2n+1)\pi - \alpha$, und deshalb ist nach vorstehender Tabelle die Tangente, negativ, mithin tang. 845° 27′ 18″ = — tang. 54° 32′ 42″

u. folgl. Log. — tang. 845° 27′ 18″ = Log. — tang. 54° 32′ 42″
= — 10,1474537.

7) Was ist Cotg. von 475° 17′ 38″?

Auflösung. Es ist $\frac{475^\circ\ 17'\ 38''}{180} = 2.180^\circ + 115^\circ\ 17'\ 38''$
$= 3.180^\circ - 64^\circ\ 42'\ 22''$,

mithin ist die diesem Bogen entsprechende Form: $(2n+1)\pi - \alpha$, und somit ist die Cotg. nach vorstehender Tabelle, negativ, folgl. ist Cotg. 475° 17′ 38″ = — Cotg. 64° 42′ 22″

und somit Log. (— Cotg. 475° 17′ 38″) = Log. — cotg. 64° 42′ 22″
= — 9,6744637.

8) Was ist Cotg. von 201° 28′ 15″?

Auflösung. Es ist $\frac{201^\circ\ 28'\ 15''}{180} = 1 \times 180^\circ + 21^\circ\ 28'\ 15''$

und daher die entsprechende Form dieses Bogens: $(2n + 1)\pi + \alpha$, mithin die Cotg. nach vorstehender Tabelle, positiv, daher Cotg. 201° 28′ 15″ = Cotg. 21° 28′ 15″,

und sonach Log. cotg. 201° 28′ 15″ = Log. cotg. 21° 28′ 15″
= 10, 4054516.

9) Was ist Sec. von 405° 17′ 8″?

Auflösung. Es ist 405° 17′ 8″ = 2.180 + 45° 17′ 8″, daher gehört dieser Bogen zur Form $2n\pi + \alpha$, und es ist sonach die Secante dieses Bogens nach vorstehender Tabelle, positiv, mithin Sec. 495° 17′ 8″ = Sec. 45° 17′ 8″,

olgl. Log. sec. $4 \times 5^\circ$ 17′ 8″ = Log. sec. 45° 17′ 8″
= 20 — Log. cos. 45° 17′ 8″ = 10,1526903.

10) Was ist Cosec. von 213° 43′ 48″?

Auflösung. Es ist $\frac{213^\circ\ 43'\ 48''}{180} = 1.180 + 33^\circ\ 43'\ 48''$,

Digitized by Google

mithin die entsprechende Form dieses Bogens: $(2n+1)\pi + \alpha$, und daher ist nach vorstehender Tabelle die Cosecante negativ, folgl. ist Cosec. 213° 43′ 48″ = — Cosec. 33° 43′ 48″,

mithin Log. (— cosec. 213° 43′ 48″) = Log. (— cosec. 33° 43′ 48″ = 20 — Log. sin. 33° 43′ 48″ = 10,2554881.

§ 8. Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln zur Ausmittelung der Funktionen selbst.

In den vorhergehenden §§ war fast ausschließlich von den Logarithmen der Funktionen die Rede, theils weil die gebräuchlichsten, die kleineren Vega'schen Tafeln nur die Logarithmen enthalten, und theils weil auch die Logarithmen der Funktionen am häufigsten gebraucht werden. Oefters muß man jedoch auch die Funktionen selbst nachschlagen, und dies geschieht nach den bekannten Regeln, wenn man Tafeln der Funktionen selbst hat. Sollen aber die Funktionen mittelst der Tafeln gefunden werden, welche nur die Logarithmen enthalten, so sucht man den Logarithmen der Funktion, subtrahirt 10 von der Charakteristik desselben, und sucht die Zahl auf, welche den Rest zum Logarithmen hat. Diese gefundene Zahl ist dann die verlangte Funktion für r (d. h. den Radius) = 1. Soll aber dabei ein anderer Werth von r zu Grunde gelegt werden, so braucht man nur mit diesem Werthe die gefundene Zahl zu multipliciren.

Beispiele.

Bemerkung. Es wird bei diesen Beispielen vorausgesetzt, daß man das logarithmisch-trigonometrische Handbuch von Vega benutzt, und r = 1 sein soll. Der Ausdruck: N. Log. α bedeutet die Zahl, deren Logarithmen = α ist.

1) Sin. 35° 58′?

Auflösung. Es ist Log. sin. 35° 58′ = 9,7688707,

daher ist sin. 35° 58′ = N. Log. (9,7688707) — 10
= N. Log. 0,7688707 — 1.

Und weil zu diesem Logarithmen in den Tafeln die Zahl 0,5873145 gefunden wird, so ist auch sin. 35° 58′ = 0,5873145.

2) Cosin. 113° 28′?

Auflösung. Es ist Log. (180° — cosin. 113° 28′) = Log. cos. 66° 32′, und Log. cosin. 66° 32′ = 9,6001181

daher ist — cosin. 113° 28′ = N. Log. (9,6001181) — 10
= N. Log. 0,6001181 — 1

Digitized by Google

und weil zu diesem Logarithmen die Zahl 0,3982154 gehört, so ist cosin. 113° 28′ = — 0,3982154.

3) Tang. 64° 27′?

Auflösung. Es ist Log. tang. 64° 27′ = 10,3205292

folgl. tang. 64° 27′ = N. Log. (10,3205292)—10
= N. Log. 0,3205292,

und weil zu diesem Logarithmen nach den Tafeln die Zahl 2,0918435 gehört, so ist auch tang. 64° 27′ = 2,0918435.

4) Cotg. 127° 18′?

Auflösung. Es ist Log. (—cotg. 127°18′)=Log.cotg. (180°—127′18′)
= Log. cotg 52° 42′.

Nun ist Log. cotg. 52° 42′ = 9,8818386

daher — cotg. 127° 18′ = N. Log. (9,8818385) —10
= N. Log. 0,8818386 —1

und da zu diesem Logarithmen in den Tafeln die Zahl 0,7617959 gefunden wird, so ist auch Log. cotg. 127° 18′ = — 0,7617959.

4) Sec. 143° 24′?

Auflösung Es ist Log. (— sec. 143° 24′)=Log sec.(180°—143°24′)
Nun ist Log. sec. 36° 36′ = 20 — Log. cos. 36° 36′.
Da nun Log. cos. 36° 36′ = 9,9046168

so ist Log. cos. 20 — 9,9046168 = 10,0953832

und daher ist — sec. 143° 24′ = N. Log. 10,0953832 — 10
= N. Log. 0,0953832,

zu welchem Logarithmen man in den Tafeln die Zahl 1,2456131 findet, folglich ist auch

sec. 143° 24′ = — 1,2456131.

Zusatz. Die Tafeln, welche die Funktionen selbst enthalten, sind nicht alle für denselben Werth von r berechnet. Den zum Grunde liegenden Werth von r aber lernt man unmittelbar kennen, wenn man entweder sin. 90°, oder tang. 45° nachschlägt, weil diese = r sind.

§ 9. Auffindung des zu einer gegebenen Funktion zugehörigen Bogens.

Soll zu dem gegebenen Logarithmen einer Funktion der ihr entsprechende Bogen gefunden werden, so ist, weil zu jeder Funktion mehrere Bogen gehören, die Aufgabe eigentlich unbestimmt; doch läßt sich fast in allen Fällen aus den Bedingungen der Aufgabe abnehmen, welcher von allen entsprechenden Bogen der eigentlich gesuchte sey. Bei dem Nachschlagen in den Tafeln muß man berücksichtigen, daß

Digitized by Google

die gegebene Zahl entweder in der Spalte, die mit dem Namen der Funktion überschrieben ist, oder auch in der, welche die Confunktion enthält, gefunden werden kann.

Wird aber die gegebene Zahl nicht in den Tafeln gefunden, so nimmt man die nächst kleinere, subtrahirt sie von der gegebenen, und dividirt den Rest durch die herrschende Differenz, so giebt der Quotient die Anzahl der Secunden, welche noch zu den Graden und Minuten der kleineren Zahl addirt oder von derselben subtrahirt werden müssen, je nachdem der Bogen mit der Funktion wächst oder abnimmt, wenn diese größer wird Man muß also diese Secunden addiren, wenn die Funktion ein Sinus oder eine Tangente ist; subtrahiren aber, wenn die Funktion ein Cosinus oder eine Cotangente ist.

Der in den Tafeln gefundene Bogen ist stets kleiner als 90°; zu einer jeden Funktion aber gehören in den 4 Quadranten zwei verschiedene Bogen, welche jedoch durch den in den Tafeln gefundenen und durch das Zeichen der Funktion vollkommen bestimmt sind.

Setzt man nun den in den Tafeln den gefundenen Bogen $= \alpha$, so giebt folgende Tabelle die Werthe des gesuchten Bogens für eine positive oder negative Funktion.

Tabelle.

		+ die gesuchten Bogen.		oder — die gesuchten Bogen.	
Sinus	α	$180 - \alpha$		$180 + \alpha$	$360 - \alpha$
Cosinus . .	α	$360 - \alpha$		$180 - \alpha$	$180 + \alpha$
Tangente . .	α	$180 + \alpha$		$180 - \alpha$	$360 - \alpha$
Cotangente .	α	$180 + \alpha$		$180 - \alpha$	$360 - \alpha$
Secante . .	α	$360 - \alpha$		$180 - \alpha$	$180 + \alpha$
Cosecante . .	α	$180 - \alpha$		$180 + \alpha$	$360 - \alpha$

Beispiele.

1) Gegeben sei Log. + sin. x = 9,6627839.

Auflösung. Hier ist 9,6627839 = Log. sin. x,

in den Tafeln findet man 9,6627026 = Log. sin. 27° 23″.

Rest = 813

die herrschende Differenz ist $\frac{9464-7026}{60} = 40{,}63$ (für 1 Secunde);

und weil $\frac{813}{40{,}63} = 20$. so ist auch $\alpha = 27° 23' 20'$,

und daher x { entweder 27° 23′ 20″
oder = (180°—27° 25′ 20″) = 152° 36′ 40″

Digitized by Google

2) Es sei gegeben + cosin. x = 9,4765044.

Auflösung. Hier ist 9,4765044 = Log cos. x,
und in den Tafeln findet man 9,4761334 = Log. cos. 72° 35';
Rest = 3710

die herrschende Differenz für 1 Secunde ist hier $\frac{5359-1334}{60}$

$= \frac{4025}{60} = 67{,}08$,

und weil $\frac{3710}{67{,}08} = \frac{371000}{6708} = 55$, so ist auch $\alpha = 72° 35' 55''$

und daher x { entweder = 72° 35' 55"
oder = (360° — 72° 35' 55") = 287° 24' 5".

3) Gegeben ist Log. — tang. x = 10,4567846.

Auflösung. Hier ist 10,4567846 = Log. — tang. x.
in den Tafeln findet man 16,4565006 = Log. 70° 44'
Rest = 2840

die herrschende Differenz hier $\frac{9063-5006}{60} = \frac{4057}{60} = 67{,}61$,

und weil $\frac{2840}{67{,}61} = \frac{284000}{6761} = 42$, so ist $\alpha = 70° 44' 42''$,

und daher, weil die gegebene Funktion negativ (—) ist,
x { entweder = 180° — 70° 41' 42" = 109° 15' 18",
oder = 360° — 70° 44' 42" = 289° 15' 18".

4) Gegeben ist Log. + cotg. x = 9,9876407.

Auflösung. Es ist 9,9876407 = Log. cotg. x,
in den Tafeln findet man 9,9876197 = Log. cotg. 45° 49',
Rest = 228

und da hier die herrschende Differenz für 1" = $\frac{8706-6179}{60}$

$= \frac{2527}{60} = 42{,}11$ ist,

so wird $\frac{228}{42{,}11} = \frac{22800}{4211} = 5$, also $\alpha = 45° 49' - 5'' = 45° 48' 55''$ u.

folgl. x = { entweder = 45° 48' 55"
oder = (270° 45°) + 48' 55" = 225° 48' 55".

5) Gegeben ist Log. (— sec. x) = 10,9873867.

Auflösung. Es ist Log. — cos. x = 20 — 10,9873867
= 9,0126133

Digitized by Google

Nun findet man in den Tafeln für $9{,}0125724 = 84^\circ\ 5'\ 30''$
$\text{Rest} = 409$

die herrschende Differenz ist hier für $1'' = 20{,}34$,

und weil $\frac{409}{203{,}4} = \frac{4090}{2034} = 2$, so ist $\alpha = 84^\circ 5' 30'' - 2'' = 84^\circ 5' 28''$,

und daher, weil die Funktion negativ, ist

x { entweder $= (180^\circ - 84^\circ\ 5'\ 28'') = 95^\circ\ 54'\ 32''$,
oder $= 360^\circ - 95^\circ\ 54'\ 32'') = 264^\circ\ 5'\ 28''$.

Ist aber anstatt des Logarithmen die Funktion selbst gegeben, so werden die entsprechenden Bogen auf dieselbe Art gefunden, wenn man besondere Tafeln für die Funktionen hat.

Sollen die fraglichen Bogen aber in den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln von Vega nachgeschlagen werden, so sucht man zuvor zu der gegebenen Zahl den Logarithmen, addirt 10 zu dessen Charakteristik (wenn vorher $r = 1$ war), und sucht hierauf die Bogen wie bekannt. Z. B.

6) Es sei gegeben $\cos. x = -0{,}4779486$ (für $r = 1$).

Auflösung. Weil $\text{Log.}\, 0{,}4779486 = 0{,}6793813 - 1$

so ist $\text{Log.}\,(-\cos. x) = (0{,}6793813 - 1) + 10$
$= 9{,}6793813$

In den Tafeln findet man für $9{,}6793602 = \text{Log.}\cos. 61^\circ 27'$,
$\text{Rest} = 211$

und weil hier die herrschende Differenz für $1'' = 38{,}68$ ist,

so findet man aus $\frac{211}{38{,}68} = \frac{21100}{3868} = 5''$,

daher $\alpha = 61^\circ\ 27^\circ - 5'' = 61^\circ\ 26'\ 55''$

da folgl. — weil die gegebene Funktion negativ ist — muß sein:

x { entweder $= 180^\circ - 61^\circ\ 26'\ 55'' = 118^\circ\ 35'\ 5''$
oder $= 360^\circ - 118^\circ\ 35'\ 5'' = 241^\circ\ 26'\ 55''$.

Zusatz.

Zu einer gegebenen Cofunktion kann der zugehörige Bog auch gefunden werden, wenn man die nächst größere Zahl aus d Tafeln nimmt, von derselben die gegebene subtrahirt, und den hi bleibenden Rest durch die herrschende Differenz theilt. Der auf di Weise erhaltene Quotient giebt die Anzahl der Secunden, welche nc zu den Graden und Minuten, die zu der aus den Tafeln genomm nen Zahl gehören, addirt werden müssen.

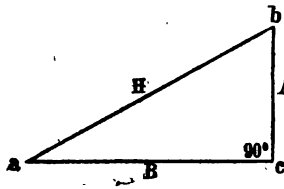
Digitized by Google

Anmerkung.

Unter der „herrschenden Differenz" wird immer diejenige Differenz verstanden, welche — wie schon bereits oben erwähnt — zwischen den beiden Zahlen (oder Logarithmen) der Tafeln steht, zwischen welchen auch die liegt, zu welcher der Bogen gesucht wird.

§ 36. Trigonometrische Formeln für a) das rechtwinklige Dreieck. (Fig. 1.)

Fig. 1.



Bezeichnet A die eine, B die andere Cathete, und H die Hypothenuse; ferner a, b und c die 3 Winkel eines rechtwinklichen Dreiecks, und f dessen Fläche, so erhält man

1) aus H: A = r: sin. a, $H = \frac{Ar.}{\sin.\ a}$

2) aus H: B = r: cos. a, $H = \frac{Br.}{\cos.\ a}$

3) aus H: A = r: sin. a $A = \frac{H \sin.\ a.}{r}$

4) aus H: B = r: cos. a $B = \frac{H.\cos.\ a.}{r}$

5) aus B: A = r tang. a, $A = \frac{B \tan g.\ a}{r}$

u. $B = \frac{Ar}{\tan g.\ a}$

6) $f = \frac{A}{2}\sqrt{[(H-A)\ (H+A)]}$

7) $f = H^2 \sin.\ 2\ a$, und

8) $f = \frac{A^2 r}{2 \tan g.\ a}$

Digitized by Google

b) Für das spitzwinklige Dreieck. (Fig. 2.)

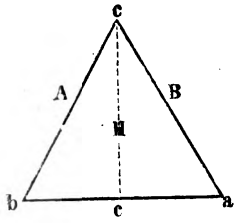


Fig. 2.

Bezeichnet in einem spitzwinklichen Dreieck (Fig. 2) H seine Höhe, A, B und C seine 3 Seiten, und a, b und c seine drei spitzen Winkel und f seinen Flächeninhalt, so findet man:

9) $f = \frac{1}{2} A B \frac{\sin. c,}{r}$ und

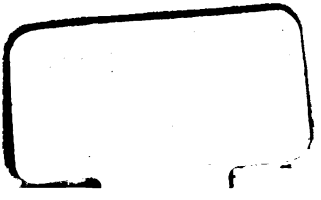
10) $f = \frac{C^2 \sin. a \sin. b}{2 r \sin. c}$. und

11) $f = \frac{1}{4} \sqrt{[(A+B+C)(A+B-C)(A+C-B)(B+C-A)]}$.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google